N. VILENKINAS

KOMBINATORIKA

N. VILENKINAS

KOMBINATORIKA

PAGALBINĖ PRIEMONĖ MOKINIAMS



KAUNAS ŠVIESA 1979

Н. Я. Виленкин
КОМБИНАТОРИКА
Москва, «Наука», 1969

Vertė PETRAS RUMŠAS

Vilenkinas N.

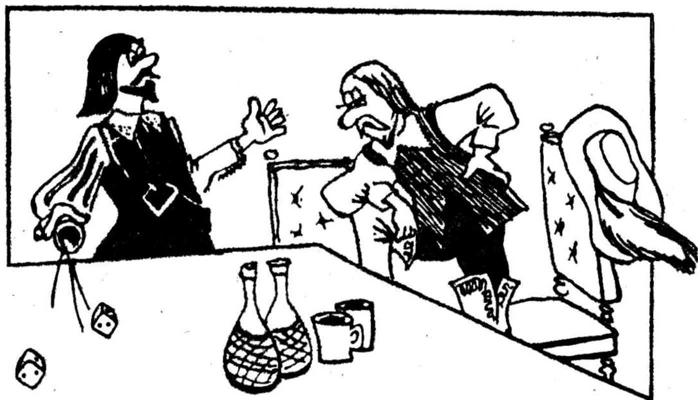
Vi-142 Kombinatorika. Kaunas, „Šviesa", 1979. 248 p., iliustr.

Knygoje populiariai pasakojama apie kombinatoriką, pateikiama kombinatorinių uždavinių sprendimo metodika.
Leidinys bus naudingas vyresniųjų klasių mokiniams, aukštųjų mokyklų matematikos fakultetų pirmųjų kursų studentams.

$V \frac{60601-287}{M 853(10)-79} 134-79$

PRATARMĖ

Įvairiausių specialybių darbuotojams tenka spręsti uždavinius, kuriuose nagrinėjamos vienokios ar kitokios kombinacijos, sudarytos iš raidžių, skaitmenų ar kitų objektų. Cecho viršininkui reikia paskirstyti kelių rūšių darbus prie turimų staklių, agronomui – išdėstyti žemės ūkio kultūrų pasėlius keliuose laukuose, direktoriaus pavaduotojui mokymo reikalams – sudaryti pamokų tvarkaraštį, mokslininkui chemikui – ištirti galimus atomų ir molekulių sąryšius, lingvistui – išnagrinėti įvairius nežinomos kalbos raidžių reikšmių variantus ir t. t. Matematikos sritis, kurioje tiriami klausimai, kiek skirtingų kombinacijų, tenkinančių vienokias ar kitokias sąlygas, galima sudaryti iš turimųjų objektų, vadinama *kombinatorika*.



Kombinatorika atsirado XVI amžiuje. Tų laikų visuomenės privilegijuotieji sluoksniai daug laiko skirdavo azartiniams žaidimams. Kortomis ir kauleliais* išlošdavo ir pralošdavo auksą ir briliantus, rūmus ir dvarus, grynaveislius žirgus ir brangius papuošalus. Klestėjo įvairiausių rūšių loterijos. Savaime aišku, kad iš pradžių kombinatorikos uždaviniai dažniausiai būdavo susiję su azartiniais žaidimais: buvo tiriama, keliais būdais

* Lošiant kauleliais, mesdavo keletą kubelių, kurių sienose būdavo įspausti taškai nuo 1 iki 6. Išlošdavo tas, kas išmesdavo daugiau taškų. Buvo ir kitokių šio lošimo variantų.

galima išmesti kokį nors akių skaičių, lošiant dviem ar trim kauleliais, arba keliais būdais galima gauti du karalius, lošiant kortomis. Tos ir kitos azartinių žaidimų problemos skatino kombinatorikos ir kartu su ja atsiradusios tikimybių teorijos vystymąsi.

Vienas pirmųjų, mėginusių nagrinėti skirtingų kombinacijų skaičių, lošiant kauleliais, buvo italų matematikas Tartalija. Jis sudarė lentelę, parodančią, keliais skirtingais būdais gali atsiversti r kaulelių. Tačiau Tartalija neatkreipė dėmesio, kad tą pačią akių sumą galima sudaryti įvairiais būdais (pavyzdžiui, $1+3+4=4+2+2$).

Kombinatorikos klausimus nagrinėti teoriškai XVII amžiuje mėgino prancūzų mokslininkai Paskalis ir Ferma. Jie pradėjo tirti nuo azartinių žaidimų problemos. Labai didelę reikšmę turėjo statytos sumos padalijimo uždavinys, kurį Paskaliui uždavė jo draugas, aistringas lošėjas Ševaljė de Mere. Problema buvo tokia: lošimas turėjo vykti iki šešių išloštų partijų, bet buvo nutrauktas, vienam dalyviui laimėjus 5 partijas, o antrajam — 4 partijas. Kaip jiems pasidalyti statytąją sumą? Buvo aišku, kad dalyti santykiu 5 : 4 neteisinga. Taikydamas kombinatorikos metodus, Paskalis išsprendė tą uždavinį bendruoju atveju, kai vienam žaidėjui iki išlošimo lieka r partijų, o antrajam — s partijų. Kitą to uždavinio sprendimą pateikė Ferma.

Tolesnė kombinatorikos raida yra susijusi su Jakobo Bernulio, Leibnico ir Oilerio vardais. Tačiau ir jų darbuose vyrauja kombinatorikos pritaikymai įvairiems žaidimams (loto, soliteris ir kt.). Paskutiniaisiais metais kombinatorika vystosi ypač audringai, nes apskritai padidėjo domėjimasis diskretine matematika. Kombinatorikos metodai taikomi, sprendžiant transporto uždavinius, pavyzdžiui, sudarant tvarkaraščius, taip pat sudarant gamybos ir produkcijos realizavimo planus. Išnagrinėtas kombinatorikos sąryšis su tiesinio programavimo, statistikos ir kitų sričių uždaviniais. Kombinatorika taikoma, sudarant bei dekoduojant šifrus ir sprendžiant kitas informacijos teorijos problemas.

Žymų vaidmenį kombinatorikos metodai vaidina ir grynai matematiniuose klausimuose — grupių ir jų konkrečių atvejų teorijoje, geometrijos pagrindų analizėje, neasociatyviųjų algebrų moksle ir t. t.

Šioje knygoje apie kombinatorikos problemas pasakojama įdomiai ir populiariai. Tačiau joje nagrinėjami ir kai kurie gana sudėtingi kombinatorikos uždaviniai, supažindinama su rekurentinių sąryšių ir generuojančių funkcijų metodais.

Pirmajame knygos skyriuje supažindinama su bendrosiomis kombinatorikos taisyklėmis — sumavimo ir dauginimo taisyklėmis. Antrajame skyriuje nagrinėjami gretiniai, kėliniai ir deriniai. Ši tradicinė, mokykloje dėstoma medžiaga paįvairinta kai kurių įdomių pavyzdžių sprendimu. Trečiajame skyriuje sprendžiami kombinatorikos uždaviniai, kuriuose tiriamosios kombinacijos vienaip ar kitaip apribojamos. Ketvirtajame skyriuje nagrinėjami skaičių skirstymo uždaviniai ir pasakojama apie geometrinius kombinatorikos metodus. Penktasis skyrius skiriamas atsitiktinio klaidžiojimo uždaviniams ir įvairioms aritmetinio trikampio modifikacijoms aptarti. Šeštajame skyriuje pasakojama apie rekurentinius

sąryšius, o septintajame – apie generuojančias funkcijas ir apie jų atskirą atvejį – Niutono formulę.

Knygos pabaigoje pateikti keli šimtai kombinatorikos uždavinių, autoriaus surinktų iš įvairių šaltinių. Daug uždavinių imta iš Vitvorto knygos „Pasirinkimas ir atsitiktinumas“ (Whitworth W. A., Choise and Chance, London, 1901), iš Riordano knygos „Kombinatorinės analizės įvadas“ (Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ. ИЛ, 1963), iš A. Jaglomo ir I. Jaglomo knygos „Neelementarūs uždaviniai, sprendžiami elementariai“ (Яглом А. М., Яглом И. М., Неэлементарные задачи в элементарном изложении, Гостехиздат, 1954), iš įvairių matematikos olimpiadinių uždavinynų ir t. t.

I SKYRIUS

BENDRIEJI KOMBINATORIKOS DĖSNIAI

Prietaringieji dviratininkai

– Ir vėl aštuoniukė! – liūdnai pratarė dviratininkų klubo pirmininkas, pažvelgęs į sulenktą savo dviračio ratą. – O iš kur visos tos nelaimės? Mat, įstodamas į klubą, gavau bilietą su numeriu 008. Nėra mėnesio, kad vienas ar kitas ratas nesusisuktų į aštuoniukę. Et, kad nekaltintų tikint prietarais, perregistruosiu visus klubo narius ir įteiksiu tik bilietus, kurių numeriai neturi aštuonetų.



Pasakyta – padaryta, ir kitą dieną pakeitė visus bilietus. *Kiek narių buvo klube, jei reikėjo surašyti visus triženklius numerius, kuriuose nėra nė vieno aštuoneto*? (Pavyzdžiui, bilietas su numeriu 000 įteiktas, o su numeriu 836 ne.)

Spręsdami šį uždavinį, pirmiausia pagalvokime, kiek vienaženklių numerių neturi aštuoneto. Aišku, kad tokių numerių yra devyni: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (numeris 8 praleistas). Paskui suraskime visus dviženklius numerius, kuriuose nėra skaitmens 8. Juos galima sudaryti šitaip: imti bet kurį turimą vienaženklį numerį ir prie jo prirašyti bet kurį iš devynių galimų skaitmenų. Šitokiu būdu iš kiekvieno vienaženklio numerio gausime po devynis dviženklius numerius. Kadangi buvo 9 „geri“ vienaženkliai numeriai, tai gausime $9 \cdot 9 = 81$ dviženklį numerį be skaitmens 8. Štai tie numeriai:

00,	01,	02,	03,	04,	05,	06,	07,	09
10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	19
20,	21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	29
30,	31,	32,	33,	34,	35,	36,	37,	39
40,	41,	42,	43,	44,	45,	46,	47,	49
50,	51,	52,	53,	54,	55,	56,	57,	59
60,	61,	62,	63,	64,	65,	66,	67,	69
70,	71,	72,	73,	74,	75,	76,	77,	79
90,	91,	92,	93,	94,	95,	96,	97,	99

Vadinasi, yra $9^2=81$ dviženklis numeris be skaitmens 8. Prie kiekvieno tokio numerio vėl galima prirašyti bet kurį iš devynių galimų skaitmenų. Tada gausime $9^2 \cdot 9=9^3=729$ triženklius numerius. Vadinasi, klube buvo 729 dviratininkai. Jeigu rašytume ne triženklius, o keturženklius numerius, tai numerių, kuriuose nėra aštuoneto, būtų $9^4=6561$.

Kito klubo dviratininkai buvo dar prietaringesni. Kadangi skaitmuo 0 panašus į ištemptą ratą, tai jie atsisakė ir to skaitmens, todėl jiems beliko aštuoni skaitmenys: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. *Kiek narių turėjo tas klubas, jei jų bilietų numeriai buvo visi triženkliai skaičiai?*

Šis uždavinys panašus į ką tik išspręstąjį, tik vietoj 9 skaitmenų dabar turime 8 skaitmenis. Todėl, atsakant į klausimą, skaičių 9 reikia pakeisti skaičiumi 8. Kitaip sakant, klube buvo $8^3=512$ narių.

Gretiniai su pasikartojimais

Dviratininkų uždavinys priklauso tokiam uždavinių tipui. Turime n skirtingų daiktų. Iš jų sudaromi visi galimi junginiai po k daiktų kiekviename, arba, kaip toliau trumpai sakysime, *k-elemenčiai junginiai.* Be to, junginį gali sudaryti net vienodi daiktai, o du junginiai laikomi skirtingais, jei skiriasi juos sudarantys daiktai, arba tų daiktų išdėstymo tvarka. *Reikia rasti visų tokių junginių skaičių.*

Minėto tipo junginiai vadinami *k-elemenčiais gretiniais su pasikartojimais iš n elementų*, o visų tokių junginių skaičius žymimas simboliu $\bar{A}_n^k$. Pirmajame dviratininkų uždavinyje elementų skaičius buvo lygus 9 (ėmėme visus skaitmenis, išskyrus 8), o kiekvieną gretinį (kiekvieną numerį) sudarė trys elementai. Įsitikinome, kad tuo atveju gretinių skaičius lygus $\bar{A}_9^3=9^3$. Savaime peršasi mintis, kad tuo atveju, kai elementų skaičius lygus n, o kiekviename gretinyje yra po k elementų, galima sudaryti n^k gretinių su pasikartojimais.

Vadinasi, norime įrodyti, kad skaičius k-elemenčių gretinių su pasikartojimais iš n elementų lygus

$$\bar{A}_n^k=n^k. \quad (1)$$

Įrodoma matematinės indukcijos metodu k atžvilgiu – gretinio elementų skaičiaus atžvilgiu, kai n reikšmė fiksuota. Kai $k=1$, atsakymas aiškus: kiekvieną gretinį (su pasikartojimais) sudaro tik vienas elementas, todėl gretiniai bus skirtingi, kai jų elementai bus skirtingų rūšių. Kadangi elementų skaičius lygus n, tai ir gretinių skaičius lygus n. Vadinasi, $\bar{A}_n^1=n$, o tai atitinka (1) formulę.

Dabar tarkime, kad lygybę $\bar{A}_n^{k-1}=n^{k-1}$ jau įrodėme, ir išnagrinėkime k-elemenčius gretinius su pasikartojimais. Visus šiuos gretinius galima sudaryti šitaip. Imkime bet kurį gretinį $(a_1, \ldots, a_{k-1})$, sudarytą iš $k-1$ elementų (su pasikartojimais), ir prie jo prijunkime elementą a_k, priklausantį vienai iš n turimųjų rūšių. Gausime kokį nors k-elementį gretinį $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$. Be to, aišku, kad iš kiekvieno gretinio, turinčio $k-1$ elementų, gausime tiek k-elemenčių gretinių, kiek yra skirtingų elementų, t. y. n gretinių. Savaime suprantama, kad, taip darydami, nepraleisime nė vieno k-elemenčio gretinio ir nė vieno nesudarysime du kartus: jei arba $(a_1, \ldots, a_{k-1}) \neq (b_1, \ldots, b_{k-1})$, arba $a_k \neq b_k$, tai $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k) \neq (b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k)$. Todėl k-elemenčių gretinių su pasikartojimais iš n elementų yra n kartų daugiau, negu $(k-1)$-elemenčių gretinių su pasikartojimais iš tų pačių elementų. Vadinasi, $\bar{A}_n^k = n\bar{A}_n^{k-1}$. Tačiau mes tarėme, kad $\bar{A}_n^{k-1}=n^{k-1}$. Todėl

$$\bar{A}_n^k = n \cdot n^{k-1} = n^k.$$

Taigi įrodėme, kad (1) lygybė teisinga su visomis k reikšmėmis.

(1) formule tenka remtis, sprendžiant įvairius klausimus. Tuojau apie kai kuriuos tokius klausimus papasakosime.

Skaičiavimo sistemos

Be dešimtainės skaičiavimo sistemos vartojamos ir kitos sistemos — dvejetainė, trejetainė, aštuntainė ir t. t.* Skaičiuojant n-taine sistema, vartojama n skaitmenų. Sužinokime, kiek k-ženklių natūrinių skaičių yra n-tainėje skaičiavimo sistemoje**. Jeigu skaičiaus pirmasis skaitmuo gali būti ir 0, tai kiekvieną k-ženklį skaičių n-tainėje skaičiavimo sistemoje galima laikyti k skaitmenų gretiniu su pasikartojimais iš n rūšių skaitmenų. Todėl, remdamiesi (1) formule, nusprendžiame, kad šitaip parašomų skaičių iš viso yra n^k.

Tačiau, rašant natūrinį skaičių, pirmasis skaitmuo 0 praleidžiamas. Todėl iš gautojo skaičiaus n^k reikia atimti kiekį tų k-ženklių skaičių, kurių pirmasis skaitmuo yra 0. Jei tų skaičių išraiškoje išbrauksime pirmąjį skaitmenį — nulį, tai gausime $(k-1)$-ženklį skaičių (jo pirmasis skaitmuo, galimas dalykas, irgi yra 0). Tokių skaičių, kaip matyti iš (1) formulės, yra n^{k-1}. Vadinasi, n-tainėje skaičiavimo sistemoje iš viso yra

$$n^k - n^{k-1} = n^{k-1}(n-1)$$

k-ženklių skaičių.

Pavyzdžiui, dešimtainėje skaičiavimo sistemoje yra $10^3 \cdot 9 = 9000$ keturženklių skaičių: iš 10 000 skaičių nuo 0 iki 9999 reikia atmesti tūkstantį skaičių, būtent, skaičius nuo 0 iki 999.

Gautąją formulę galima išvesti ir kitaip. Juk k-ženklio skaičiaus, parašyto n-tainėje skaičiavimo sistemoje, pirmasis skaitmuo gali būti bet kuris iš skaitmenų $1, 2, \ldots, n-1$. Antrasis ir tolesnieji skaitmenys gali būti bet kuris iš skaitmenų $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Vadinasi, pirmajai vietai užimti yra $n-1$ kandidatų, o visoms kitoms vietoms (jų yra $k-1$) — po n kandidatų. Iš to lengva suvokti, kad aptariamųjų skaičių yra $(n-1)n^{k-1}$.

---

* Žr. Фомин С. В., Системы счисления. — М., Наука, 1963.
** Šiuo atveju skaičių 0 patogu laikyti natūriniu skaičiumi.

Užraktas su slaptažodžiu

Seifams ir automatinėms saugojimo kameroms užrakinti vartojami slapti užraktai, kurie atsidaro tik tada, kai surenkamas koks nors „slaptažodis“. Tas žodis surenkamas vienu ar keliais diskais, ant kurių parašytos raidės (arba skaitmenys). *Sakykime, kad diske parašyta 12 raidžių, o slaptažodis turi 5 raides. Kiek nesėkmingų bandymų gali padaryti žmogus, nežinąs slaptažodžio?*

Iš (1) formulės matyti, kad bendras kombinacijų skaičius lygus

$$12^5 = 248\,832.$$

Vadinasi, nesėkmingų bandymų gali būti 248 831. Beje, seifai dažniausiai įrengiami taip, kad po pirmo nesėkmingo bandymo pasigirsta pavojaus signalas.

Morzės abėcėlė

Perduodant pranešimus telegrafu, vartojama Morzės abėcėlė. Toje abėcėlėje raidės, skaitmenys ir skyrybos ženklai žymimi taškais ir brūkšneliais. Be to, vienoms raidėms žymėti pakanka vieno ženklo (pavyzdžiui, raidė *E* žymima ·), o kitoms reikia keturių ženklų (pavyzdžiui, V žymima ··· —), tuo tarpu skaičiai žymimi jau penkiais ženklais.

Kodėl būtent penkiais? Ar neužtenka mažiau ženklų: gal pavyktų perduoti bet kokį pranešimą kombinacijomis, sudarytomis ne daugiau kaip iš keturių ženklų? Pasirodo, kad tai neįmanoma, o atsakyti į tą klausimą kaip tik padeda gretinių su pasikartojimais skaičiaus formulė. Iš (1) formulės matyti, kad $\bar{A}_2^1 = 2$. Kitąip sakant, vienu ženklu galima perduoti tik dvi raides (*E* – ženklu · , *T* – ženklu —). Dviejų ženklų junginiais galima perduoti $2^2 = 4$ raides, trijų ženklų – $2^3 = 8$ raides, o keturių – $2^4 = 16$ raidžių. Todėl visų raidžių, kurias galima perduoti ne daugiau kaip keturių ženklų junginiais, skaičius lygus

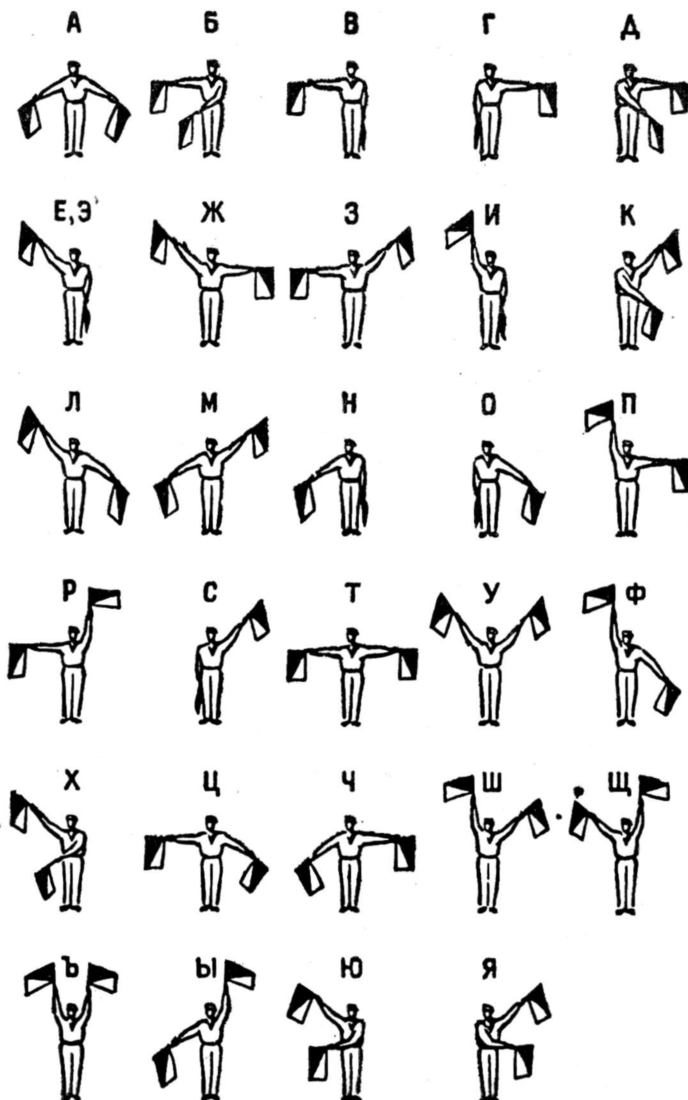
$$2 + 4 + 8 + 16 = 30.$$

Tuo tarpu lietuviškoje abėcėlėje yra 32 raidės, o dar reikia perdavinėti skaitmenis ir skyrybos ženklus. Aišku, kad keturių ženklų simbolių nepakanka. Jei vartosime ir penkiaženklius simbolius, tai prie turimų 30 simbolių prisidės dar 32. Tada turėsime 62 simbolius, kurių tikrai pakaks telegrafavimui.

Telegrafuojant vartojamas ir penkiaženklis kodas, kuriame kiekviena raidė perduodama tik penkiais ženklais. Šiuo atveju vietoj taškų ir brūkšnių keičiama srovės kryptis arba siunčiamas srovinis ir besrovis impulsas. Naudodamiesi tokiu kodu, turime $2^5 = 32$ kombinacijas. Jų pakanka raidėms perduoti, o skaitmenims, skyrybos ženklams ir t. t. perduoti vartojamos tos pačios kombinacijos, kaip ir raidėms. Todėl telegrafo aparatai su penkiaženkliu kodu turi specialų prietaisą pereiti nuo raidžių prie skaitmenų ir atgal.

Jūrų semaforas

Laivuose kartais vartojamas vėliavėlių semaforas. Tokiu atveju kiekvieną raidę atitinka tam tikra vėliavėlių padėtis. Dažniausiai vėliavėlės laikomos skirtingose pusėse nuo signalizuotojo kūno. Tačiau, perduodant kai kurias raides (б, д, к, х, ю, я), abi vėliavėlės nukreipiamos į vieną pusę. Kodėl reikėjo padaryti tokią išimtį? Atsakyti į tą klausimą irgi



padeda ta pati gretinių su pasikartojimais formulė. Kiekviena vėliavėlė gali būti laikoma penkiose skirtingose padėtyse – stačiai žemyn, nuožulniai žemyn, horizontaliai, nuožulniai aukštyn ir stačiai aukštyn. Kadangi turime dvi vėliavėles, tai pagrindinių padėčių kombinacijų iš viso yra $\bar{A}_5^2=5^2=25$. Be to, dar reikia atmesti padėtį, kai abi vėliavėlės nukreiptos žemyn – ji reikalinga vienam žodžiui nuo kito atskirti. Iš viso turime 24 kombinacijas, o to nepakanka visoms abėcėlės raidėms perduoti. Todėl, signalizuojant kai kurias raides, tenka abi vėliavėles nukreipti į vieną pusę.

Elektroninė skaičiavimo mašina

Elektroninės skaičiavimo mašinos gali spręsti įvairiausius uždavinius. Ta pačia mašina galima šifruoti užrašus, parašytus nežinomomis kalbomis, projektuoti užtvankas ir apdoroti raketos judėjimo duomenis. Kuo paaiškinamas toks mašinos panaudojimo lankstumas? Daugiausia tuo, kad visi tie uždaviniai sprendžiami skaičiuojant, atliekant veiksmus su skaičiais. Bet kodėl mašina gali spręsti tiek uždavinių ir dar su įvairiausiais skaitiniais duomenimis? Kiek skirtingų skaičių kombinacijų galima įvesti į mašiną?

Atsakydami į tą klausimą, panagrinėkime, pavyzdžiui, mašiną „Strela“. Operatyvioji tos mašinos atmintis sudaryta iš 2048 ląstelių, o kiekviena ląstelė – iš 43 dvejetainių skyrių. Kiekviename skyriuje gali būti arba 0, arba 1. Vadinasi, iš viso turime $43 \cdot 2048 > 87\,000$ skirtingų vietų, o toms vietoms užpildyti – dviejų rūšių ženklus (0 ir 1). Iš (1) formulės matyti, kad mašinos „Strela“ skirtingų būsenų skaičius yra didesnis už $2^{87\,000}$. Sunku įsivaizduoti, koks milžiniškas tas skaičius. Galima tik pasakyti, kad skaičius neutronų, kuriuos galima sugrūsti į rutulį su spinduliu, lygiu atstumui iki tolimiausio mums žinomo ūko, ne didesnis už 2^{500}.

Milijoninė mašininkių armija turėtų dirbti dešimt metų, norėdama išspausdinti visus tuos skaičius, kurie gali būti užrašyti vienoje vienintelėje mašinos atminties ląstelėje (manoma, kad mašininkės dirba po 7 valandas kasdien ir vieną 43-jų ženklų skaičių išspausdina per 10 sekundžių).

Genetinis kodas

Įžymiausias XX amžiaus biologijos mokslo pasiekimas – genetinio kodo mįslės įminimas. Pavyko išaiškinti, kaip paveldimoji informacija perduodama palikuonims. Pasirodė, kad ta informacija yra užrašyta milžiniškose dezoksiribonukleininės rūgšties (DNR) molekulėse. DNR molekulės skiriasi viena nuo kitos tvarka, kuria jose išdėstytos 4 azotinės bazės: adeninas, timinas, guaninas ir citozinas. Tos bazės nulemia organizmo baltymų sudarymo iš dviejų dešimčių aminorūgščių tvarką; kiekviena aminorūgštis užšifruota kodu, sudarytu iš trijų azotinių bazių.

Lengva suvokti, kodėl būtent iš trijų. Juk, kombinuojant po dvi bazes, galima užšifruoti tik $4^2=16$ aminorūgščių, o to nepakanka. Jeigu jungsime po 3 bazes, tai gausime $4^3=64$ kombinacijas. Tai net per daug dviem dešimtims aminorūgščių užšifruoti. Būtų labai įdomu sužinoti, kaip gamtoje panaudojamas informacijos perteklius – juk kombinacijų skaičius lygus 64, o aminorūgščių skaičius triskart mažesnis.

Vienoje chromosomoje yra kelios dešimtys milijonų azotinių bazių. Skirtingų kombinacijų, kuriose jos gali eiti viena po kitos, yra neįsivaizduojamai daug*. Menkutės tų kombinacijų dalelytės pakaktų visai gyvosios gamtos įvairybei aprašyti per visą gyvybės egzistavimo Žemėje laiką. Aišku, reikia turėti mintyje, kad tik nežymi visų teoriškai galimų kombinacijų dalis atitinka gyvybingus organizmus.

Bendrieji kombinatorikos dėsniai

Toliau įsitikinsime, kad kombinatorikos uždaviniai būna įvairiausių rūšių. Bet dauguma uždavinių sprendžiama, remiantis dviem pagrindinėmis taisyklėmis – sumavimo taisykle ir dauginimo taisykle.

Dažnai visas tiriamąsias kombinacijas pavyksta suskirstyti į keletą klasių, kiekvieną kombinaciją priskiriant vienai ir tik vienai klasei. Aišku tokiu atveju *bendrąjį kombinacijų skaičių gauname, sudėdami visų klasių kombinacijų skaičius*. Šis teiginys vadinamas *sumavimo taisykle*. Kartais ji pasakoma šiek tiek kitaip:

Jei kokiam nors objektui A pasirinkti yra m būdų, o kitam objektui B pasirinkti yra n būdų, tai pasirinkti „arba A, arba B" yra $m+n$ būdų.

Taikant taip suformuluotą sumavimo taisyklę, reikia žiūrėti, kad nė vienas objekto A pasirinkimo būdas nesutaptų su kokiu nors objekto B pasirinkimo būdu (arba, kaip sakėme anksčiau, kad nė viena kombinacija nepatektų į dvi klases). Jei tokių sutapimų yra, tai sumavimo taisyklė negalioja: kai k – sutapimų skaičius, susidaro tik $m+n-k$ pasirinkimo būdų.

Antroji taisyklė, vadinamoji *dauginimo taisyklė*, yra kiek sudėtingesnė. Sudarant kombinacijas iš dviejų elementų, dažnai žinoma, keliais būdais galima pasirinkti pirmąjį elementą ir keliais – antrąjį; be to, antrojo elemento pasirinkimų skaičius nepriklauso nuo to, kaip pasirinktas pirmasis elementas. Sakykime, kad pirmajam elementui pasirinkti turime m būdų, o antrajam – n būdų. Tada tų elementų porai pasirinkti turime mn būdų. Tai galima pasakyti ir kitaip:

Jei objektui A pasirinkti yra m būdų, o po kiekvieno tokio pasirinkimo objektą B galima pasirinkti n būdais, tai porą (A, B) pasirinkti nurodytąja tvarka galima mn būdais.

---

* Jei N – bazių skaičius chromosomoje, tai kombinacijų skaičius lygus 4^N; žr. (1) formulę.

Norėdami įsitikinti dauginimo taisyklės teisingumu, pastebėsime, kad kiekvieną objekto A pasirinkimo būdą galima sukombinuoti su n objekto B pasirinkimo būdų. Todėl yra mn poros (A, B) pasirinkimo būdų.

Dauginimo taisyklę galima vaizdžiai pailiustruoti tokia lentele:

1 lentelė

(A_1, B_{11}),	...,	(A_1, B_{1n})
(A_2, B_{21}),	...,	(A_2, B_{2n})
.....	.....	.....
(A_i, B_{i1}),	...,	(A_i, B_{in})
.....	.....	.....
(A_m, B_{m1})	...,	(A_m, B_{mn})

Čia raidėmis $A_1, \ldots, A_m$ pažymėjome m objekto A pasirinkimo būdų, o raidėmis $B_{i1}, \ldots, B_{in}$ – n objekto B pasirinkimo būdų, kai objektas A pasirinktas i-tuoju būdu. Aišku, kad toje lentelėje surašyti visi poros (A, B) pasirinkimo būdai ir kad joje yra mn elementų.

Jeigu objekto B pasirinkimas nepriklauso nuo to, kaip pasirinktas objektas A, tai vietoj 1 lentelės turėsime paprastesnę lentelę:

2 lentelė

(A_1, B_1),	(A_1, B_2),	...,	(A_1, B_n)
(A_2, B_1),	(A_2, B_2),	...,	(A_2, B_n)
.....	.....	.....	.....
(A_m, B_1),	(A_m, B_2),	...,	(A_m, B_n)

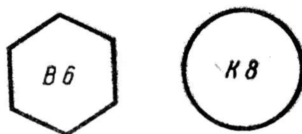
Aišku, galima sudaryti ne tik poras, bet ir daugiau elementų turinčius junginius. Tada reikėtų spręsti tokį uždavinį:

Kiek galima sudaryti k-elemenčių junginių, kai pirmąjį elementą galima pasirinkti iš n_1 skirtingų rūšių, antrąjį – iš n_2 skirtingų rūšių, ..., k-tąjį iš n_k skirtingų rūšių. Be to, du junginiai laikomi skirtingais, kai bent vienoje jų vietoje stovi skirtingi elementai.

Tą uždavinį sprendžiame taip pat, kaip ir dviratininkų uždavinį. Pirmajam elementui pasirinkti turime n_1 būdų. Prie kiekvieno pasirinktojo elemento galime prijungti bet kurį iš n_2 antrųjų elementų; taip susidaro $n_1 n_2$ porų. Prie kiekvienos poros galima prijungti bet kurį iš n_3 trečiųjų elementų; taip susidaro $n_1 n_2 n_3$ trejetų. Šitaip tęsdami, galų gale sužinosime, kad nurodytojo tipo junginių skaičius lygus $n_1 n_2 \ldots n_k$.

Dviratininkų uždavinyje reikėjo pasirinkti tris elementus (šimtų skaitmenį, dešimčių skaitmenį ir vienetų skaitmenį). Kiekviename etape galėjome pasirinkti vieną iš devynių leidžiamų skaitmenų. Todėl ir gavome $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ numerius. O štai sunkesnis uždavinys.

Sudarinėjami ženklai, sujungiant geometrinę figūrą (apskritimą, kvadratą, trikampį arba šešiakampį) su raide ir skaitmeniu (1 pav.). *Kiek tokių ženklų galima sudaryti?*



1 pav.

Pirmiausia galima pasirinkti geometrinę figūrą. Tai galima atlikti keturiais būdais (turime keturių rūšių figūras). Paskui reikia pasirinkti vieną iš 32 raidžių ir, pagaliau, vieną iš 10 skaitmenų. Iš viso gauname $4 \cdot 32 \cdot 10 = 1280$ kombinacijų.

Domino uždavinys

Sunkiau sprendžiami tie kombinatorikos uždaviniai, kuriuose pasirinkimų skaičius po kiekvieno etapo priklauso nuo to, kokie elementai buvo pasirinkti ankstesniuose etapuose. Štai tokio tipo uždavinys.

Keliais būdais iš 28 domino kaulelių galima pasirinkti du kaulelius, kad prie vieno kaulelio galėtume pridėti antrąjį (t. y., kad koks nors akių skaičius abiejuose kauleliuose būtų vienodas)?

Iš pradžių pasirenkame vieną kaulelį. Tai galima padaryti 28 būdais. Be to, 7 atvejais pasirinktasis kaulelis bus „dublis“, t. y. kuris nors iš kaulelių 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, o 21 atveju – kaulelis su skirtingais akių skaičiais (pavyzdžiui, 05, 13 ir t. t.). Pirmuoju atveju antrąjį kaulelį galima pasirinkti 6 būdais (pavyzdžiui, jei pirmasis kaulelis yra 11, tai antrasis gali būti vienas iš kaulelių 01, 12, 13, 14, 15, 16). Antruoju atveju antrąjį kaulelį galima pasirinkti 12 būdų (prie kaulelio 35 tinka kauleliai 03, 13, 23, 33, 34, 36, 05, 15, 25, 45, 55, 56). Pagal dauginimo taisyklę pirmuoju atveju turime $7 \cdot 6 = 42$ pasirinkimo būdus, o antruoju $21 \cdot 12 = 252$ būdus. Vadinasi, pagal sumavimo taisyklę turime $42 + 252 = 294$ poros pasirinkimo būdus.

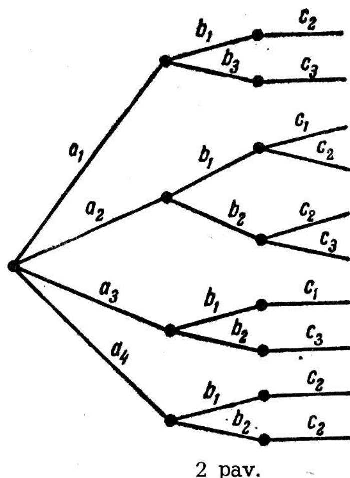
Pateiktajame samprotavime buvo atsižvelgiama į eilę, kuria imami kauleliai. Todėl kiekviena kaulelių pora buvo imama du kartus (pavyzdžiui, pirmą kartą 01 ir 16, o antrą kartą 16 ir 01). Jei nekreipsime dėmesio į kaulelių ėmimo eilę, tai gausime dukart mažiau pasirinkimo būdų, t. y. 147 būdus.

Kosminio laivo komanda

Kai galimų pasirinkimų skaičius kiekviename etape priklauso nuo to, kokie elementai buvo pasirinkti anksčiau, kombinacijų sudarymo procesą patogu vaizduoti „medžiu“. Pirmiausia iš vieno taško nubrėžiame tiek atkarpų, kiek skirtingų pasirinkimo būdų turime pirmajame etape (kiekviena atkarpa atitinka po vieną elementą). Iš kiekvienos atkarpos

galo nubrėžiame tiek atkarpų, kiek galimų pasirinkimo būdų yra antrajame etape, jei pirmajame etape buvo pasirinktas šis elementas, ir t. t. Šitaip braižant, gaunamas „medis“, į kurį žiūrint lengva sužinoti uždavinio sprendinių skaičių.

Išnagrinėsime tokį pavyzdį. Kaip žinome, sudarant daugiaviečio kosminio laivo įgulą, reikia nustatyti, ar kosminės kelionės dalyviai yra psichologiškai suderinami. Net visiškai geri, atskirai imant, žmonės gali netikti ilgai bendrai kelionei. Sakykime, kad kosminiu laivu skris trys žmonės: laivo vadas, inžinierius ir gydytojas. Vado vietai užimti yra keturi kandidatai: a_1, a_2, a_3, a_4, inžinieriaus vietai – trys kandidatai: b_1, b_2, b_3, o gydytojo vietai – irgi trys kandidatai: c_1, c_2, c_3. Ištyrus juos, paaiškėjo, kad vadas a_1 psichologiškai suderinamas su inžinieriais b_1 ir b_3 ir su gydytojais c_2 ir c_3, vadas a_2 – su inžinieriais b_1 ir b_2 ir su visais gydytojais, vadas a_3 – su inžinieriais b_1 ir b_2 ir su gydytojais c_1 ir c_3, o vadas a_4 – su visais inžinieriais ir gydytoju c_2. Bo to, inžinierius b_1 psichologiškai nesuderinamas su gydytoju c_3, inžinierius b_2 – su gydytoju c_1, o inžinierius b_3 – su gydytoju c_2. *Keliais būdais galima sudaryti kosminio laivo įgulą, atsižvelgiant į šias sąlygas?*



2 pav.

Atitinkamas medis pavaizduotas 2 paveiksle. Iš jo matyti, kad yra tik 10 galimų kombinacijų (jei nebūtų suderinamumo sąlygos, tai kombinacijų skaičius pagal dauginimo taisyklę būtų lygus $36=4 \cdot 3 \cdot 3$).

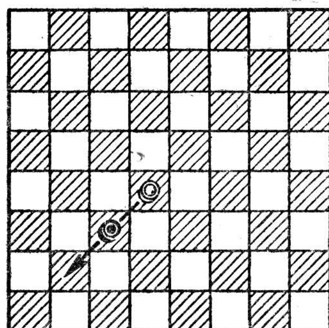
Šaškių uždavinys

Spręsime tokį uždavinį:

Keliais būdais galima pastatyti ant lentos dvi šaškes – baltą ir juodą, kad baltoji šaškė galėtų kirsti juodąją?

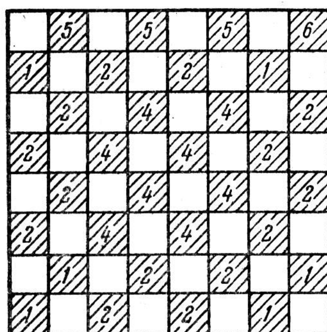
Pagal šaškių taisykles šaškės statomos ant juodųjų langelių, o viena šaškė, kirsdama kitą, peršoka per ją ir atsistoja artimiausiame langelyje

už jos (3 pav.). Kai šaškė pasiekia paskutinę horizontalę, ji virsta dama ir gali kirsti visas šaškes, stovinčias vienoje įstrižainėje su ja, išskyrus šaškes, stovinčias įstrižainės gale.

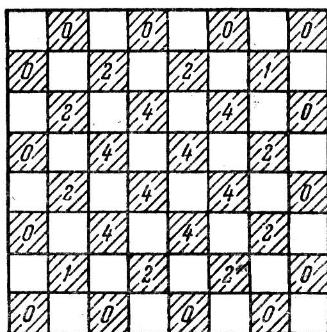


3 pav.

Tas uždavinys sunkiai sprendžiamas dėl to, kad skirtingas baltosios šaškės padėtis atitinka nevienodas skaičius juodosios šaškės padėčių, kuriose tą šaškę galima kirsti. Pavyzdžiui, kai baltoji šaškė stovi langelyje *a*1, yra tik viena juodosios šaškės padėtis, kurioje galima ją kirsti. Jei baltoji šaškė stovi langelyje *c*3, tai ieškomųjų juodosios šaškės padėčių skaičius lygus 4. Pagaliau, jei baltoji šaškė yra virtusi dama langelyje *h*8, tai yra 6 juodosios šaškės padėtys, kuriose ją gali kirsti ta dama.



a)



b)

4 pav.

Todėl šiuo atveju paprasčiausia nurodyti, kiek galimų juodosios šaškės padėčių atitinka kiekvieną baltosios šaškės padėtį: tada beliks visus tuos skaičius sudėti. 4 paveiksle, *a*, pavaizduota šaškių lenta, kurioje surašyti atitinkami skaičiai. Juos sudėję, gauname 87. Vadinasi, yra 87 galimos tų šaškių padėtys.

Savaime aišku, kad yra tiek pat padėčių, kuriose juodoji šaškė gali kirsti baltąją. Tačiau padėčių, kuriose abi šaškės gali kirsti viena kitą,

yra mažiau. Pavyzdžiui, jei baltoji šaškė stovi lentos pakraštyje, tai nėra langelio, kuriame stovėdama juodoji šaškė galėtų ją nukirsti. Todėl visus kraštinius langelius atitinka skaičius 0. Panašiai randame skaičius, kurie atitinka kitus juoduosius langelius. Jie surašyti 4 paveiksle, *b*. Sudėję tuos skaičius, sužinome, kad nurodytomis sąlygomis pastatyti dvi šaškes yra 50 būdų.

Pagaliau apskaičiuokime, kiek yra baltosios ir juodosios šaškės padėčių, kuriose jos viena kitos kirsti negali. Tą uždavinį galėtume spręsti panašiai, kaip sprendėme pirmuosius du uždavinius: statome baltąją šaškę paeiliui į visus juoduosius langelius ir suskaičiuojame, kiek yra būdų pastatyti juodąją šaškę taip, kad nė viena šaškė negalėtų kirsti kitos. Tačiau šiuo atveju paprasčiausia pritaikyti „arbatinuko principą“* ir tą uždavinį pakeisti jau išspręstu uždaviniu. Tuo tikslu sužinosime, kiek iš viso yra būdų pastatyti baltąją ir juodąją šaškę ant lentos. Pastačius baltąją, juodajai lieka 31 laukelis. Todėl pagal dauginimo taisyklę yra $32 \cdot 31 = 992$ būdai pastatyti abi šaškes. Tačiau 87 atvejais baltoji šaškė kerta juodąją, o 87 atvejais juodoji kerta baltąją. Todėl reikia atmesti $2 \cdot 87 = 174$ atvejus. Bet reikia neužmiršti, kad šitaip kai kuriuos atvejus atmetame dukart: vieną kartą dėl to, kad baltoji šaškė kerta juodąją, o antrą – dėl to, kad juodoji kerta baltąją. Mes jau apskaičiavome, kad yra 50 padėčių, kuriose abi šaškės gali kirsti viena kitą. Todėl skaičius padėčių, kuriose nė viena šaškė negali kirsti kitos, lygus

$$992 - 174 + 50 = 868.$$

---

* Pasakojama, kad kartą matematikas paklausęs fiziką: „Prieš Jus stovi tuščias arbatinukas ir neuždegta dujinė viryklė; kaip užvirinti vandenį?“ „Reikia į arbatinuką įpilti vandens, uždegti dujas ir pastatyti arbatinuką ant viryklės“, – atsakęs fizikas.



„Gerai“, – taręs matematikas. „O dabar išspręskite kitą uždavinį: prie uždegtos viryklės stovi arbatinukas, pilnas vandens. Kaip užvirinti vandenį?“ „Tai dar lengviau – reikia arbatinuką pastatyti ant viryklės“. „Nieko panašaus!“ – atrėžęs matematikas. „Reikia užgesinti viryklę, išpilti vandenį iš arbatinuko: tada turėsime pirmąjį uždavinį, kurį jau mokame spręsti!“

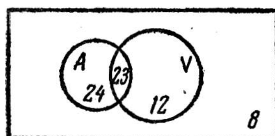
Todėl, kai naują uždavinį keičia jau išspręstu uždaviniu, juokais sakoma, kad pritaikomas „arbatinuko principas“.

Kiek žmonių nemoka užsienio kalbų?

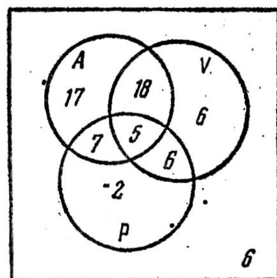
Metodas, kuriuo sprendėme paskutinį uždavinį, dažnai taikomas kombinatorikos uždaviniams spręsti. Išnagrinėsime dar šitokį uždavinį:

Mokslinio tyrimo institute dirba 67 žmonės. Iš jų 47 moka anglų kalbą, 35 – vokiečių kalbą ir 23 – abi kalbas. Kiek žmonių, dirbančių institute, nemoka nei anglų, nei vokiečių kalbos?

Sprendžiant šį uždavinį, reikia visą bendradarbių kolektyvą suskirstyti į grupes, neturinčias bendrų elementų. Pirmąją grupę sudaro tie bendradarbiai, kurie moka tik anglų kalbą, antrąją – tie, kurie moka tik vokiečių kalbą, trečiąją – tie, kurie moka abi kalbas, o ketvirtąją – tie, kurie nemoka nei anglų, nei vokiečių kalbos (5 pav.). Pasakyta, kad trečiąją grupę sudaro 23 žmonės. Kadangi anglų kalbą moka 47 žmonės,



a)



b)

5 pav.

tai tik vieną anglų kalbą moka $47-23=24$ žmonės. Panašiai sužinome, kad tik vieną vokiečių kalbą moka $35-23=12$ žmonių. Iš to matyti, kad žmonių, mokančių bent vieną kalbą, skaičius lygus $23+24+12=59$. Kadangi iš viso institute dirba 67 žmonės, tai ketvirtajai grupei priklauso $67-59=8$ žmonės. Vadinasi, 8 žmonės nemoka nei anglų, nei vokiečių kalbos.

Gautąjį atsakymą galima parašyti šitaip:

$$8=67-(23+24+12).$$

Kadangi 24 gavome, iš 47 atimdami 23, o 12 – iš 35 atimdami 23, tai

$$8=67-23-(47-23)-(35-23)=67-47-35+23.$$

Dabar matome dėsningumą: iš visų bendradarbių skaičiaus atimame mokančių anglų kalbą skaičių ir mokančių vokiečių kalbą skaičių. Tada kai kurie bendradarbiai patenka į abu sąrašus ir „atimami“ du kartus.

Tai kaip tik tie poliglotai, kurie moka abi kalbas. Pridėję jų skaičių, sužinome, kiek asmenų nemoka nė vienos iš tų kalbų.

Išspręstąjį uždavinį pasunkinsime, pridėdami dar vieną kalbą. Sakykime, prancūzų kalbą moka 20 žmonių, anglų ir prancūzų – 12 žmonių, vokiečių ir prancūzų – 11 žmonių, o visas tris kalbas – 5 žmonės. Aišku, kad tik anglų ir prancūzų kalbas (be vokiečių kalbos) moka $12-5=7$ žmonės, o tik vokiečių ir prancūzų kalbas moka $11-5=6$ žmonės. Vadinasi, tiktai vieną prancūzų kalbą moka $20-7-6-5=2$ žmonės. Tie žmonės priklauso 8 žmonių grupei, nemokančiai anglų ir vokiečių kalbų. Todėl žmonių, nemokančių nė vienos iš trijų kalbų, skaičius lygus $8-2=$ $=6$.

Gautąjį atsakymą galima parašyti taip:

$$6=8-2=67-47-35+23-(20-7-6-5)=$$
$$=67-47-35+23-20+(12-5)+(11-5)+5=$$
$$=67-47-35-20+23+12+11-5.$$

Dabar dėsnis visiškai aiškus. Pirma iš visų bendradarbių skaičiaus reikia atimti skaičių tų, kurie moka vieną kurią kalbą (galbūt ir kitas). Tada kai kurie bus „atimti“ dukart, nes jie moka dvi kalbas. Todėl reikia pridėti skaičius 23, 12 ir 11, reiškiančius, kiek žmonių moka dvi kalbas (galbūt dar ir trečią). Asmenys, mokantys tris kalbas, bus iš pradžių tris kartus „atimti“, o paskui tris kartus „pridėti“. Kadangi jų skaičių vis dėlto reikia atimti, tai tenka dar atimti skaičių 5.

Priskirties ir išskirties formulė

Išnagrinėtieji pavyzdžiai padeda suformuluoti bendrą dėsnį. Sakykime, kad kai kuriems iš N turimų daiktų būdingos savybės α_1, α_2, ..., α_n. Kiekvienas tų daiktų arba neturi nė vienos tų savybių, arba turi vieną kurią savybę, arba turi keletą savybių. Simboliu $N(\alpha_i\alpha_j...\alpha_k)$ pažymėsime skaičių daiktų, turinčių savybes α_i, α_j, ..., α_k (į kitas tų daiktų savybes nekreipiame dėmesio). Jei reikės pabrėžti, kad imami tik tie daiktai, kurie neturi kurios nors savybės, tai tą savybę rašysime su brūkšneliu. Pavyzdžiui, $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4')$ žymi skaičių daiktų, turinčių savybes α_1 ir α_2, bet neturinčių savybės α_4 (į kitas jų savybes nekreipiame dėmesio).

Skaičius daiktų, neturinčių nė vienos minėtųjų savybių, pagal šią taisyklę žymimas $N(\alpha_1'\alpha_2'...\alpha_n')$. Bendrojo dėsnio formulė bus tokia:

$$N(\alpha_1'\alpha_2'...\alpha_n')=N-N(\alpha_1)-N(\alpha_2)-...-N(\alpha_n)+$$
$$+N(\alpha_1\alpha_2)+N(\alpha_1\alpha_3)+...+N(\alpha_1\alpha_n)+...+N(\alpha_{n-1}\alpha_n)-$$
$$-N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)-...-N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)+...+(-1)^n N(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n). \quad (2)$$

Ši algebrinė suma apima visas galimas savybių kombinacijas (į jų tvarką nekreipiame dėmesio); sumos narys teigiamas, kai savybių, į kurias atsižvelgiama, skaičius yra lyginis, arba neigiamas, kai tas skaičius ne-

lyginis. Pavyzdžiui, prieš $N(\alpha_1 \alpha_3 \alpha_6 \alpha_8)$ rašomas ženklas +, o prieš $N(\alpha_3 \alpha_4 \alpha_{10})$ – ženklas –. Parašytąją (2) formulę vadiname *priskirties ir išskirties formule*: pirma išskiriame visus daiktus, turinčius bent vieną savybę $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, paskui priskiriame daiktus, turinčius bent dvi savybes, toliau išskiriame turinčius bent tris savybes ir t. t.

Įrodysime, kad (2) lygybė yra teisinga. Taikysime indukcijos metodą, atsižvelgdami į savybių skaičių. Kai yra tik viena savybė α, formulė savaime aiški. Kiekvienas daiktas arba turi savybę α, arba jos neturi. Todėl

$$N(\alpha')=N-N(\alpha).$$

Dabar tarkime, kad (2) lygybė yra teisinga, kai savybių skaičius lygus $n-1$:

$$N(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}')=N-N(\alpha_1)-\ldots-N(\alpha_{n-1})+N(\alpha_1 \alpha_2)+\ldots+N(\alpha_{n-2} \alpha_{n-1})-$$
$$-N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)-\ldots-N(\alpha_{n-3} \alpha_{n-2} \alpha_{n-1})+\ldots+(-1)^{n-1} N(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}). \quad (3)$$

Pagal prielaidą šią lygybę galima taikyti bet kokiai daiktų aibei. Atskiru atveju ji tinka ir aibei, sudarytai iš $N(\alpha_n)$ elementų, turinčių savybę α_n. Taikydami (3) formulę šitai aibei gauname

$$N(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}' \alpha_n)=N(\alpha_n)-N(\alpha_1 \alpha_n)-\ldots-N(\alpha_{n-1} \alpha_n)+$$
$$+N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_n)+\ldots+N(\alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n)-$$
$$-N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_n)-\ldots+(-1)^{n-1} N(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \alpha_n \quad (4)$$

pridedame nuorodą, kad visur imami tik daiktai su savybe α_n).

Iš (3) lygybės panariui atimame (4) lygybę. Dešinėje pusėje gausime kaip tik tai, ko mums reikia, – dešiniąją (2) lygybės pusę. Kairėje pusėje gausime skirtumą

$$N(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}')-N(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}' \alpha_n). \quad (5)$$

Tačiau $N(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}')$ – skaičius daiktų, kurie neturi savybių $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ ir galbūt turi savybę α_n. O $N(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}' \alpha_n)$ – skaičius daiktų, kurie neturi savybių $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ ir tikrai turi savybę α_n. Vadinasi, (5) skirtumas kaip tik lygus skaičiui daiktų, kurie neturi nė vienos savybės $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. Kitaip sakant,

$$N(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}')-N(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}' \alpha_n)=N(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}' \alpha_n').$$

Todėl skirtumas kairėje šios lygybės pusėje lygus (2) lygybės kairiajai pusei. Vadinasi, įrodėme, kad ta lygybė yra teisinga, kai savybių skaičius lygus n.

Taigi, jei (2) lygybė yra teisinga, kai savybių skaičius lygus $n-1$, tai ji teisinga ir tuo atveju, kai savybių skaičius lygus n. Be to, ji teisinga, kai $n=1$. Todėl (2) lygybė teisinga, kai n – bet kuris natūrinis skaičius.

(2) formulę galima užrašyti simboliškai:

$$N(\alpha' \beta' \ldots \omega')=N(1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\omega). \quad (6)$$

Sudauginus dešinėje parašytuosius dvinarius, sandaugą $N\alpha\beta\ldots\lambda$ reikia rašyti šitaip: $N(\alpha\beta\ldots\lambda)$. Pavyzdžiui, vietoj $N\alpha\beta\delta\omega$ rašoma $N(\alpha\beta\delta\omega)$.

Kur klaida!

Klasės seniūnas pateikė tokias žinias apie mokinius: „Klasėje mokosi 45 mokiniai, iš jų 25 berniukai. 30 mokinių mokosi tik gerai ir labai gerai, iš jų 16 berniukų. Sportuoja 28 mokiniai, iš jų 18 berniukų ir 17 mokinių, besimokančių gerai ir labai gerai. 15 berniukų mokosi gerai ir labai gerai ir, be to, sportuoja".

Po kelių dienų jį išsikvietė klasės vadovas (kuris, kaip tyčia, dėstė matematiką) ir pasakė, kad žinios klaidingos. Pamėginkime išsiaiškinti, kaip jis tai sužinojo. Apskaičiuokime, kiek mergaičių nesportuoja ir vis dėlto retkarčiais gauna trejetukų (o gal ir dvejetukų). Raide α_1 žymėsime priklausymą vyriškai lyčiai, α_2 – gerą pažangumą, o α_3 – sporto mėgimą. Sužinosime, kam lygus $N(\alpha_1' \alpha_2' \alpha_3')$. Iš uždavinio sąlygų matyti, kad

$$N(\alpha_1) = 25, \quad N(\alpha_2) = 30, \quad N(\alpha_3) = 28, \quad N(\alpha_1 \alpha_2) = 16,$$

$$N(\alpha_1 \alpha_3) = 18, \quad N(\alpha_2 \alpha_3) = 17, \quad N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 15.$$

Vadinasi, pagal priskirties ir išskirties formulę gauname

$$N(\alpha_1' \alpha_2' \alpha_3') = 45 - 25 - 30 - 28 + 16 + 18 + 17 - 15 = -2.$$

Bet atsakymas negali būti neigiamas! Todėl pateiktose žiniose yra vidinių prieštaravimų: žinios klaidingos.

Eratosteno rėtis

Viena didžiausių matematikos mįslių yra pirminių skaičių išsidėstymas visų natūrinių skaičių sekoje. Kartais du pirminiai skaičiai yra atskirti tik vienu skaičiumi (pavyzdžiui, 17 ir 19, 29 ir 31), o kartais tarp jų yra milijonai sudėtinių skaičių. Dabar matematikai jau gana daug žino apie tai, kiek pirminių skaičių yra N pirmųjų natūrinių skaičių aibėje. Paaiškėjo, kad tiems skaičiavimams labai pravartu taikyti metodą, kurį jau vartojo senovės graikų mokslininkas Eratostenas (jis gyveno III amžiuje prieš mūsų erą Aleksandrijoje).

Eratostenas nagrinėjo įvai iausius klausimus, gavo puikių rezultatų iš daugelio sričių – matematikos, astronomijos ir kitų mokslų, bet dėl tokio daugiapusiškumo jo tyrimams truputį trūksta gilumo. Amžininkai juokais vadindavo Eratosteną ,,visur antruoju" (antrasis matematikas po Euklido, antrasis astronomas po Hiparcho ir pan.).

Matematikoje Eratostenas kaip tik domėjosi klausimu, kokiu būdu iš natūrinių skaičių nuo 1 iki N išskirti visus pirminius skaičius*. Jis sugalvojo tokį metodą. Pirmiausia išbraukomi visi skaičiai, kurie dalijasi iš 2 (išskyrus patį skaičių 2). Paskui imamas pirmasis išlikęs skaičius (būtent, 3). Savaime aišku, kad tas skaičius yra pirminis. Išbraukiami visi po jo parašyti skaičiai, kurie dalijasi iš 3. Pirmasis neišbrauktas skaičius bus 5. Išbraukiami visi po jo parašyti skaičiai, kurie dalijasi iš 5, ir t. t. Skaičiai, kurie lieka po visų išbraukinėjimų, yra pirminiai. Kadangi Eratosteno laikais buvo rašoma vaško lentelėse ir skaičius ne išbraukinėdavo, bet išdurdavo, tai lentelė po aprašytosios procedūros būdavo panaši į rėtį. Todėl Eratosteno metodas pirminiams skaičiams išskirti buvo pavadintas ,,Eratosteno rėčiu".

* Skaičių 1 Eratostenas laikė pirminiu. Dabar vienetą matematikai laiko savotišku skaičiumi – nei pirminiu, nei sudėtiniu.

Apskaičiuokime, kiek skaičių liks pirmajame šimte, kai Eratosteno metodu išbrauksime skaičius, kurie dalijasi iš 2, 3 ir 5. Kitaip sakant, išspręskime tokį uždavinį: Kiek pirmosios šimtinės skaičių nesidalija nei iš 2, nei iš 3, nei iš 5? Tas uždavinys sprendžiamas, taikant priskirties ir išskirties formulę.

Raide α_1 pažymėkime skaičiaus dalumo iš 2 savybę, α_2 – dalumo iš 3 savybę, o α_3 – dalumo iš 5 savybę. Tada $\alpha_1\alpha_2$ reiškia skaičiaus dalumą iš 6, $\alpha_1\alpha_3$ – dalumą iš 10, o $\alpha_2\alpha_3$ – dalumą iš 15. Pagaliau $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ reiškia, kad skaičius dalijasi iš 30. Mums reikia sužinoti, kiek skaičių nuo 1 iki 100 nesidalija nei iš 2, nei iš 3, nei iš 5, t. y. neturi nė vienos iš savybių α_1, α_2 ir α_3. Pagal (2) formulę gauname

$$N(\alpha_1' \alpha_2' \alpha_3') = 100 - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1 \alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_3) +$$

$$+ N(\alpha_2 \alpha_3) - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3).$$

Norint sužinoti, kiek skaičių nuo 1 iki N dalijasi iš n, reikia N padalyti iš n ir imti gautojo dalmens sveikąją dalį. Todėl

$$N(\alpha_1) = 50, \quad N(\alpha_2) = 33, \quad N(\alpha_3) = 20, \quad N(\alpha_1 \alpha_2) = 16,$$

$$N(\alpha_1 \alpha_3) = 10, \quad N(\alpha_2 \alpha_3) = 6, \quad N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 3.$$

Vadinasi, $N(\alpha_1' \alpha_2' \alpha_3') = 26$.

Šitaip sužinojome, kad 26 skaičiai nuo 1 iki 100 nesidalija nei iš 2, nei iš 3, nei iš 5. Tie skaičiai liks po pirmųjų trijų Eratosteno procedūros etapų. Be jų, dar liks skaičiai 2, 3 ir 5. Iš viso liks 29 skaičiai.

Iš pirmojo tūkstančio po pirmųjų trijų Eratosteno procedūros etapų liks 269 skaičiai, nes šiuo atveju

$$N(\alpha_1) = 500, \quad N(\alpha_2) = 333, \quad N(\alpha_3) = 200,$$

$$N(\alpha_1 \alpha_2) = 166, \quad N(\alpha_1 \alpha_3) = 100, \quad N(\alpha_2 \alpha_3) = 66, \quad N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 33.$$

II SKYRIUS

GRETINIAI, KĖLINIAI IR DERINIAI

Išnagrinėjome keletą bendrų taisyklių kombinatorikos uždaviniams spręsti. Taikant šias taisykles, galima spręsti įvairiausių tipų uždavinius. Tačiau, kaip sprendžiant geometrijos uždavinius nepatogu visą laiką remtis aksiomomis, o geriau remtis teoremomis, taip kombinatorikoje, užuot kiekvieną uždavinį sprendus pagal bendras taisykles, patogiau taikyti žinomas formules. Mat, kai kurie uždavinių tipai pasitaiko daug dažniau, negu kiti. Junginiai, kurie pasitaiko tuose uždaviniuose, turi specialius pavadinimus — gretiniai, kėliniai ir deriniai.

Tokių junginių skaičiui rasti yra išvestos specialios formulės, kurios ir taikomos, sprendžiant įvairius kombinatorikos uždavinius. Su viena tokia formule jau susipažinome: I skyriaus pradžioje įsitikinome, kad skaičius k-elemenčių gretinių su pasikartojimais iš n tipų elementų lygus n^k. Dabar išsiaiškinsime, kiek tokių gretinių galima sudaryti, kai elementų kartoti neleidžiama, t. y. kai visi elementai, sudarantys gretinį, yra skirtingi. Pirmiausia išspręsime tokį uždavinį.

Futbolo pirmenybės

TSRS futbolo pirmenybių aukščiausioje lygoje dalyvauja 17 komandų. Jos gali laimėti aukso, bronzos ir sidabro medalius. Keliais būdais gali būti paskirstyti tie medaliai?

Šis uždavinys sprendžiamas, taikant dauginimo taisyklę. Aukso medalius gali laimėti bet kuri iš 17 komandų. Kitaip sakant, čia yra 17 galimų atvejų. Jei aukso medalius laimi kuri nors komanda, tai lieka tik 16 pretendentų į sidabro medalius. Pasikartojimų negali būti: komanda, apdovanota aukso medaliais, negali gauti sidabro medalių.

Vadinasi, įteikus aukso medalius kuriai nors komandai, lieka 16 variantų įteikti sidabro medalius. Panašiai, įteikus ir aukso, ir sidabro medalius, tik viena iš likusių 15 komandų gali gauti bronzos medalius. Vadinasi, pagal dauginimo taisyklę medalius paskirstyti yra $17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$ galimų variantų.

Gretiniai be pasikartojimų

Išspręstasis uždavinys priklauso kombinatorikos uždavinių, nagrinėjančių gretinius be pasikartojimų, klasei. Bendroji tų uždavinių formuluotė yra tokia:

Turime n skirtingų daiktų. Kiek iš jų galima sudaryti k-elemenčių junginių? Junginiai čia laikomi skirtingais, kai jie arba vienas nuo kito skiriasi bent vienu elementu arba yra sudaryti iš tų pačių elementų, bet skiriasi elementų išdėstymo tvarka.

Tokie junginiai vadinami *gretiniais be pasikartojimų*, o jų skaičius žymimas A_n^k. Sudarydami k-elementį gretinį be pasikartojimų iš n daiktų, turime pasirinkti k kartų. Pirmame etape galima pasirinkti bet kurį iš n turimų daiktų. Pasirinkus pirmąjį elementą, antrajame etape tenka rinktis iš $n-1$ likusių daiktų: imti antrą kartą tą patį daiktą negalima*. Panašiai trečiajame etape pasirinkimui liks tik $n—2$ laisvų daiktų, ketvirtajame $n-3$ daiktų, ..., k-tajame etape turėsime $n-k+1$ daiktų. Todėl, taikydami dauginimo taisyklę, įsitikinome, kad skaičius k-elemenčių gretinių be pasikartojimų iš n daiktų išreiškiamas šitaip:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1). \quad (1)$$

Mokslo draugija

Išvestąją formulę pritaikysime tokiam uždaviniui spręsti. Mokslo draugija turi 25 narius. Reikia išrinkti prezidentą, viceprezidentą, mokslinį sekretorių ir iždininką. Keliais būdais galima išrinkti draugijos valdybą, jei kiekvienas draugijos narys gali užimti tik vieną postą?

Šiuo atveju reikia apskaičiuoti, kiek gretinių (be pasikartojimų) galima sudaryti iš 25 elementų po 4. Juk čia svarbu ne tik, kas bus išrinktas į draugijos valdybą, bet ir kokius postus užims išrinktieji (valdyba: prezidentas Jonaitis, viceprezidentas Budriūnas, mokslinis sekretorius Petraitis, iždininkas Antanaitis skiriasi nuo valdybos: prezidentas Petraitis, viceprezidentas Jonaitis, mokslinis sekretorius Budriūnas ir iždininkas Antanaitis). Todėl atsakymas apskaičiuojamas šitaip:

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

Kėliniai

Sudarydami gretinius be pasikartojimų iš n elementų po k, gavome junginius, kurie vienas nuo kito skiriasi ir pačiais elementais, ir jų išdėstymo tvarka. Tačiau, jei sudarinėtume junginius iš visų n elementų, tai jie galėtų skirtis vienas nuo kito tik juose esančių elementų tvarka. Tokie junginiai vadinami *kėliniais iš n elementų*, arba trumpiau *n-elemenčiais kėliniais.*

---

* Primename, kad skirtingai nuo gretinių su pasikartojimais, dabar turime tik po vieną kiekvienos rūšies elementą.

Kitaip sakant, n-elemenčiais kėliniais vadinami gretiniai be pasikartojimų, sudaryti iš visų turimų n elementų. Galima taip pat sakyti, kad kėliniais iš n elementų vadinami visi galimi n-elemenčiai junginiai, jei į kiekvieną junginį visi tie elementai įeina po vieną kartą ir junginiai vienas nuo kito skiriasi tik elementų tvarka. Kėlinių iš n elementų skaičius žymimas P_n. Formulę, išreiškiančią P_n, iš karto gauname iš gretinių (be pasikartojimų) skaičiaus formulės, būtent,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1. \qquad (2)$$

Vadinasi, norint sužinoti, kiek kėlinių galima sudaryti iš n elementų, reikia sudauginti visus natūrinius skaičius nuo 1 iki n. Ta sandauga žymima $n!$ (skaitoma: en faktorialas). Todėl

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n.$$

Be to, susitariama, kad $1! = 1$.

Toliau dažnai mums pasitaikys reiškinys $0!$. Nors atrodo, kad $0!$ turėtų būti lygus nuliui, bet susitarta, kad $0! = 1$.

Mat faktorialas, be abejo, turi tokią savybę:

$$n! = n(n-1)!$$

Ta lygybė teisinga, kai $n > 1$. Natūralu apibrėžti $0!$ taip, kad šita lygybė liktų teisinga, kai $n = 1$, t. y. kad būtų $1! = 1\cdot 0!$. Tačiau tada reikia tarti, kad $0! = 1$.

Dar pastebėsime, kad (1) formulę, reiškiančią gretinių be pasikartojimų skaičių, galima parašyti šitaip:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (3)$$

Iš tikrųjų, kadangi daugikliai $1, 2, 3, \ldots, n-k$ yra parašyti (3) trupmenos skaitiklyje ir vardiklyje, tai, suprastinę tą trupmeną, gauname $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$, o tai sutampa su (1) formule.

Bokštų uždavinys

Keliais būdais galima pastatyti ant šachmatų lentos 8 bokštus taip, kad jie negalėtų kirsti vienas kito?

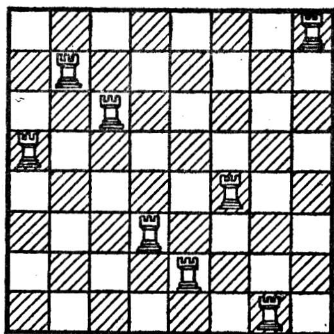
Savaime aišku, kad, taip išdėsčius, kiekvienoje horizontalėje ir kiekvienoje vertikalėje stovi po vieną bokštą. Imkime vieną tokį dėstinį ir tarkime, kad a_1 — užimto pirmos horizontalės langelio numeris, a_2 — užimto antros horizontalės langelio numeris, ..., a_8 — užimto aštuntos horizontalės langelio numeris. Tada $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ yra koks nors skaičių 1, 2, ..., 8 kėlinys (skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_8$, savaime aišku, yra skirtingi: priešingu atveju bent vienoje vertikalėje stovėtų ne vienas bokštas). Atvirkščiai, jei $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ — koks nors skaičių 1, 2, ..., 8 kėlinys, tai jį atitinka taip išdėstyti bokštai, kad jie negali kirsti vienas kito. Pavyzdžiui, 6 paveiksle pavaizduotas bokštų dėstinys, atitinkąs kėlinį 7 5 4 6 1 3 2 8. Vadinasi, bokštų galimų dėstinių skaičius lygus skaičių 1, 2, ..., 8 kėlinių skaičiui P_8. Kadangi

$$P_8 = 8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40\,320,$$

tai nurodytomis sąlygomis sustatyti bokštus yra 40 320 būdų.

Visiškai panašiai įrodoma, kad *lentoje, turinčioje n horizontalių ir n vertikalių, sustatyti n bokštų taip, kad jie negalėtų kirsti vienas kito, yra n! būdų.*

Visiškai kitokį atsakymą gautume, jei bokštai kuo nors skirtųsi vienas nuo kito, pavyzdžiui, būtų skirtingos spalvos arba sunumeruoti. Tada iš kiekvieno nenumeruotų bokštų dėstinio gautume $n!$ numeruotų bokštų dėstinių: jie gaunami, bokštus visais galimais būdais keičiant vieną su kitu vietomis (užimtieji langeliai nesikeičia). Todėl šiuo atveju bokštus sustatyti taip, kad jie nekirstų vienas kito, turėtume $(n!)^2$ būdų.



6 pav.

Tą pačią išvadą galima gauti kitaip, tiesiog taikant dauginimo taisyklę. Lentoje yra n^2 langelių, ir bet kuriame langelyje galima statyti pirmąjį bokštą. Išbraukus horizontalę ir vertikalę, kuriose pastatytas pirmasis bokštas, lieka lenta, turinti $n-1$ horizontalių ir $n-1$ vertikalių, t. y. $(n-1)^2$ langelių. Vadinasi, antrajam bokštui pastatyti yra $(n-1)^2$ būdų ir t. t. Panašiai įsitikiname, kad pastatyti trečiąjį bokštą lieka $(n-2)^2$ būdų ir t. t. Iš viso gauname

$$n^2(n-1)^2 \ldots 1^2 = (n!)^2$$

bokštų išdėstymo būdų.

Lingvistų problemos

Lingvistams – gyvųjų ir mirusiųjų kalbų specialistams – dažnai reikia perskaityti užrašus nežinomomis kalbomis. Sakykime, kad jie aptiko tekstą, kurį įrašant pavartoti 26 nežinomi ženklai. Tie ženklai yra raidės, reiškiančios 26 garsus, be to, skirtingi ženklai reiškia skirtingus garsus. *Kiek yra būdų tiems ženklams priskirti garsus?*

Rašto ženklus surašykime kokia nors tvarka. Tada kiekvienas būdas ženklams priskirti garsus bus koks nors garsų kėlinys. Tačiau iš 26 garsų galima sudaryti $P_{26} = 26!$ kėlinių. Tas skaičius apytiksliai lygus $4 \cdot 10^{26}$. Savaime aišku, kad patikrinti visus tuos variantus – neįveikiamas darbas ne tik žmogui, bet ir elektroninei skaičiavimo mašinai. Todėl stengiamasi sumažinti tikrinamų variantų skaičių. Dažnai pavyksta atskirti ženklus, kurie reiškia balsius, nuo ženklų, reiškiančių priebalsius (balsės

dažniau stovi prie priebalsių, negu balsės prie balsių arba priebalsės prie priebalsių; ištyrus, kokie junginiai dažniausiai pasitaiko, galima balsių ženklus atskirti nuo priebalsių ženklų). Sakykime, kad mums pavyko nustatyti, kad 7 ženklai reiškia balsius, o 19 ženklų – priebalsius. Apskaičiuokime, *kiek kartų sumažėjo galimų variantų skaičius*. 7 balsių ženklus kaitalioti vieną su kitu yra 7! būdų, o 19 priebalsių ženklų – 19! būdų. Iš viso yra $7!\cdot 19!$ galimų kombinacijų. Vadinasi, darbas palengvėjo $(26!):(7!\cdot 19!)\approx 650\,000$ kartų. Žinoma, pasidarė lengviau, bet $7!\cdot 19!$ – irgi milžiniškas skaičius.

Paskui tiriamas atskirų ženklų dažnis tekste. Lygindami tą dažnį su raidžių dažniu kalbose, artimose teksto kalbai, galime apytiksliai spręsti, ką reiškia kai kurie ženklai. Kitus ženklus pavyksta atspėti, palyginus tiriamąjį tekstą su tuo pačiu tekstu kita kalba (valdovai senovėje mėgo savo ,,žygdarbius" garsinti keliomis kalbomis).

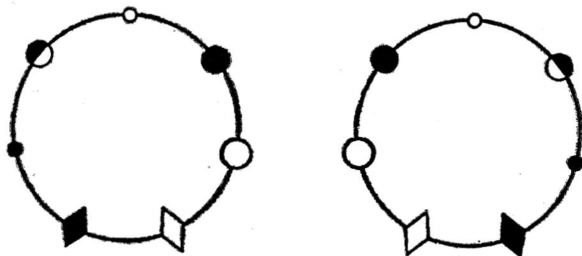
Sakykime, kad, šitaip dirbant, pavyko atpažinti 4 balses ir 13 priebalsių. Kiek galimų variantų dar liko? Aišku, kad liko $3!\cdot 6!=4320$ variantų. Tiek variantų jau galima paeiliui patikrinti elektronine skaičiavimo mašina.

Su panašiais sunkumais susiduria ir kriptologai – kodų iššifravimo specialistai.

Ratelis

Septynios merginos šoka ratelį. Keliais skirtingais būdais jos gali sustoti į ratelį?

Jeigu jos stovėtų vietoje, tai gautume $7!=5040$ kėlinių. Bet kadangi ratelis sukasi, tai šokėjų padėtis aplinkos daiktų atžvilgiu neturi reikšmės: reikia atsižvelgti tik į jų tarpusavio padėtį. Todėl kėlinius, kurie gaunami vienas iš kito, sukantis rateliui, reikia laikyti vienodais. Kadangi, sukantis rateliui, iš kiekvieno kėlinio gauname šešis naujus kėlinius, tai skaičių 5040 reikia padalyti iš 7. Vadinasi, iš merginų, šokančių ratelį, galima sudaryti $5040:7=720$ skirtingų kėlinių.



7 pav.

Apskritai, jei nagrinėjami kėliniai iš n elementų, išdėstytų ne eilute, bet apskritimu, ir du kėliniai laikomi vienodais, kai jie gaunami vienas iš kito posūkiu, tai skirtingų kėlinių skaičius lygus $(n-1)!$.

O dabar apskaičiuokime, kiek vėrinių galima sudaryti iš 7 skirtingų karolių. Lyginant šį uždavinį su ką tik išspręstuoju, galima pagalvoti, kad skirtingų vėrinių skaičius lygus 720. Bet vėrinį galima ne tik pasukti, bet ir apversti (7 pav.). Todėl to uždavinio atsakymas – skaičius 720 : 2= =360.

Kėliniai su pasikartojimais

Iki šiol perstatinėjome daiktus, kurie skyrėsi vienas nuo kito. Jei kai kurie perstatinėjami daiktai yra vienodi, tai kėlinių gauname mažiau: kai kurie kėliniai vienas su kitu sutampa.

Pavyzdžiui, perstatinėdami žodžio „masė“ raides, gausime 24 skirtingus kėlinius:

masė	samė	mėsa	sėma
maės	mėas	saėm	sėam
msaė	smaė	smėa	msėa
ėsam	ėmas	amės	asėm
ėasm	aėsm	aėms	ėams
amsė	asmė	ėsma	ėmsa

Jei vietoj žodžio „masė“ imsime žodį „mama“, tai visuose parašytuose kėliniuose raidę „s“ reikės pakeisti raide „m“, o raidę „ė“ – raide „a“. Tuomet kai kurie iš 24 turimų kėlinių pasidarys vienodi. Pavyzdžiui, pirmoje eilutėje parašyti kėliniai masė, samė, mėsa, sėma po tokio pakeitimo virs žodžiu „mama“. Visiškai panašiai visi keturi kėliniai, parašyti antroje eilutėje, pavirs žodžiu „maam“. Apskritai visi 24 kėliniai susiskirstys į grupes po keturis kėlinius; raidę „s“ pakeitus raide „m“, o raidę „ė“ – raide „a“, visi vienos grupės kėliniai pavirs tuo pačiu žodžiu. Lentelėje kiekviena tokia grupė sudaro eilutę. Todėl iš žodžio „mama“ galima sudaryti 24 : 4=6 skirtingus kėlinius. Štai tie kėliniai:

mama, maam, mmaa, amam, aamm, amma.

Bendrasis uždavinys formuluojamas šitaip:

Turime k skirtingų tipų daiktus. Kiek kėlinių galima sudaryti iš n_1 *pirmojo tipo elementų,* n_2 *antrojo tipo elementų,* ..., n_k *k-tojo tipo elementų?*

Kiekvieną kėlinį turi sudaryti $n=n_1+n_2+\ \ldots\ +n_k$ elementų. Jei visi elementai būtų skirtingi, tai kėlinių skaičius būtų lygus $n!$. Bet dėl to, kad kai kurie elementai sutampa, gauname mažiau kėlinių. Kad taip yra iš tikrųjų, įsitikinsime, išnagrinėję, pavyzdžiui, kėlinį

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n_1}\underbrace{bb\ldots b}_{n_2}\ldots\underbrace{xx\ldots x}_{n_k}, \qquad (4)$$

kuriame iš pradžių surašyti visi pirmojo tipo elementai, paskui – visi antrojo tipo elementai, ..., pagaliau – visi k-tojo tipo elementai. Pirmojo tipo elementus sukeitinėti vieną su kitu vietomis yra n_1! būdų. Kadangi tie elementai yra vienodi, tai tokie perstatinėjimai kėlinio nepakeičia.

Taip pat nieko nepakeičia ir n_2! antrojo tipo elementų perstatinėjimų, ..., n_k! k-tojo tipo elementų perstatinėjimų. Pavyzdžiui, kėlinyje „mmaa“ niekas nepasikeis, kai pirmąjį elementą sukeisime su antruoju arba trečiąjį – su ketvirtuoju.

Bet kurio tipo elementus galima sukeitinėti vieną su kitu nepriklausomai nuo visų kitų tipų elementų perstatinėjimo. Todėl (4) kėlinio elementus sukeitinėti vieną su kitu vietomis taip, kad kėlinys nepasikeistų, yra $n_1!\,n_2!\dots n_k!$ būdų (taikome dauginimo taisyklę). Tą patį galima pasakyti ir apie bet kurį kitą tų elementų kėlinį. Todėl visų $n!$ kėlinių aibė suskyla į grupes, kurių kiekvieną sudaro $n_1!\,n_2!\dots n_k!$ vienodų kėlinių. Vadinasi, skirtingų kėlinių, kuriuos galima sudaryti iš duotųjų elementų, skaičius lygus

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}. \qquad (5)$$

Primename, kad šiuo atveju $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Taikant (5) formulę, lengva atsakyti į tokį klausimą: *Kiek kėlinių galima sudaryti iš žodžio „sakalas“ raidžių?* Šiuo atveju turime dvi raides „s“, tris raides „a“, vieną raidę „k“ ir vieną raidę „l“; iš viso 7 raides. Todėl pagal (5) formulę kėlinių skaičius lygus

$$P(3, 2, 1, 1) = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 420.$$

Anagramos

Iki XVII amžiaus beveik nebuvo mokslinių žurnalų. Mokslininkai apie savo kolegų darbus sužinodavo arba iš knygų, arba iš privačių laiškų. Dėl to atsirasdavo daug sunkumų, publikuojant naujus rezultatus – knygos spausdinimas trukdavo ištisus metus, o parašyti apie savo atradimą privačiame laiške būdavo rizikinga: ko gero kas nors pasisavins rezultatus, o tada eik, įrodinėk, kad ne jis pats tai sugalvojo, o iš gauto laiško sužinojo. Galėjo atsitikti ir taip: laiško gavėjas seniai nagrinėjo tą patį klausimą, išsprendė jį ir iš laiško nieko naujo nesužinojo, netgi pats žadėjo rašyti kolegai analogišką pranešimą.

Dėl tos priežasties dažnai kildavo ginčai dėl prioriteto. Net XVII amžiaus pabaigoje tebevyko ilgi ginčai dėl prioriteto tarp Niutono ir Leibnico (kas pirmiau atrado diferencialinį ir integralinį skaičiavimą), tarp Niutono ir Huko (kas pirmiau suformulavo visuotinės traukos dėsnį) ir t. t.

Senovėje Archimedui teko griebtis net klastos. Kai kuriems Aleksandrijos mokslininkams pasisavinus Archimedo rezultatus, kuriuos jie sužinojo iš jo laiškų, Archimedas parašė jiems dar vieną laišką. Tame laiške jis aprašė nepaprastai gražias formules kai kurių figūrų plotams ir tūriams skaičiuoti. Aleksandriečiai vėl paskelbė, kad tas formules jie žiną labai seniai ir kad Archimedas jiems nieko naujo nepranešęs. Bet čia tuoj paaiškėjo, kad jie pateko į Archimedo spąstus – aprašytosios formulės buvo klaidingos! Norėdami apsaugoti savo prioritetą ir neleisti

per anksti paskelbti apie pasiektus rezultatus, mokslininkai trumpu sakiniu išreikšdavo atradimo esmę, o paskui to sakinio raides sukeisdavo vietomis ir laišką su sukeistomis raidėmis pasiųsdavo savo kolegoms. Tokie tekstai su sukeistomis raidėmis vadinami anagramomis. Pavyzdžiui, žodžiai „varlė" ir „rėlva" – anagramos. Spausdinant knygą su smulkiu rezultato aprašymu, joje pateikdavo ir anagramos dešifruotę.

Anagramomis naudodavosi ir politiniuose ginčuose. Pavyzdžiui, nužudžius prancūzų karalių Henriką III, iš jo žudiko vardo *frère Jacques Clément* (brolis Žakas Klemanas) buvo sudaryta anagrama *C'est l'enfer qui m'a créé* (mane pagimdė pragaras). Karaliaus priešininkai neliko skolingi ir iš karaliaus vardo *Henri de Valois* (Anri de Valiua) sudarė anagramą *Vilain Herodés* (šlykštusis Erodas). Christijanas Hiugensas (1629 – 1695), aptikęs Saturno žiedą, sudarė tokią anagramą:

aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiiii, lll, mm,
nnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, ttttt, uuuuu.

Surašius anagramos raides reikiama eile, gaunamas šitoks tekstas:

Annulo cingitur tenui, plano, nusquam
cohaerente, ad eclipticam inclinato

(Apsuptas plonu, plokščiu žiedu, niekur nesilaikančiu, į ekliptiką pasvirusiu.)

Tačiau ne visada anagramos padėdavo išlaikyti paslaptį. Tas pats Hiugensas, aptikęs pirmąjį Saturno palydovą Titaną ir pastebėjęs, kad jis aplink planetą apsisuka per 15 dienų, sudarė anagramą ir pasiuntė savo kolegoms. Bet vienas jų, Valisas, puikus anagramų dešifravimo specialistas, išaiškino tą anagramą ir ta pačia tema sudarė savo anagramą, kurią pasiuntė Hiugensui. Kai mokslininkai vienas kitam išaiškino savo anagramas, atrodė, lyg Valisas tą atradimą būtų padaręs anksčiau už Hiugensą. Paskui Valisas prisipažino, kad jis pajuokavo, norėdamas įrodyti, jog anagramos nenaudingos slaptam susirašinėjimui. Bet Hiugensas neįvertino to pokšto ir smarkiai supyko...

Apskaičiuokime, kiek kėlinių reikėtų sudaryti, norint išaiškinti, ką reiškia pirmoji Hiugenso anagrama. Tą anagramą sudaro 7 raidės *a*, 5 raidės *c*, 1 raidė *d*, 5 raidės *e*, 1 raidė *g*, 1 raidė *h*, 7 raidės *i*, 3 raidės *l*, 2 raidės *m*, 9 raidės *n*, 4 raidės *o*, 2 raidės *p*, 1 raidė *q*, 2 raidės *r*, 1 raidė *s*, 5 raidės *t* ir 5 raidės *u*; iš viso 61 raidė. Vadinasi, pagal (5) formulę gauname

$$\frac{61!}{7!\,5!\,1!\,5!\,1!\,1!\,7!\,3!\,2!\,9!\,4!\,2!\,1!\,2!\,1!\,5!\,5!}$$

kėlinių. Tas milžiniškasis skaičius maždaug lygus 10^{60}.

Elektroninė skaičiavimo mašina, daranti milijoną operacijų per sekundę, visų tų kėlinių nepajėgtų patikrinti nė per visą Saulės sistemos egzistavimo laiką.

Tam tikra prasme žmogui lengviau tą uždavinį išspręsti, negu mašinai. Juk žmogus tikrintų ne visus kėlinius, o tik tuos, kurių žodžiai turi prasmę, be to, laikytųsi morfologijos taisyklių ir t. t. Tai smarkiai sumažintų reikalingų bandymų skaičių. Svarbiausia – žmogus apytiksliai žino, kokią problemą sprendžia jo korespondentas. Ir vis dėlto toks darbas nepaprastai sunkus.

Deriniai

Ne visada mums rūpi, kokia eile išdėstyti elementai junginyje. Pavyzdžiui, jei TSRS šachmatų pirmenybių pusfinalyje dalyvauja 20 žmonių, o į finalą gali patekti tik trys, tai eilė, kurią sudaro pirmasis trejetas, neturi svarbos: nors ir trečiuoju, bet patekti į finalą! Juk atsitikdavo, kad TSRS čempionu tapdavo šachmatininkas, pusfinalyje užėmęs ne pačią aukščiausiąją vietą.



Panašiai būna ir TSRS futbolo pirmenybėse: iš aukščiausios lygos, kurią sudaro 17 komandų, iškrenta komandos, užėmusios keturias paskutines vietas. Menka paguoda, kad komanda užėmė keturioliktąją o ne septynioliktąją vietą – vis tiek reikės pereiti į žemesnę lygą.

Tais atvejais, kai nesidomima elementų tvarka junginyje ir kreipiamas dėmesys tik į junginio sudėtį, kalbama apie derinius. Vadinasi, *k-elemenčiais deriniais iš n elementų* vadinami visi galimi k-elemenčiai junginiai, sudaryti iš tų elementų, kai junginiai vienas nuo kito skiriasi pačiais elementais, bet ne jų išdėstymo tvarka. Derinių, kuriuos galima sudaryti iš n elementų, jungiant po k elementų, skaičius žymimas C_n^k.

Derinių skaičiaus formulę lengva sudaryti iš anksčiau išvestos gretinių skaičiaus formulės. Iš tikrųjų, sudarę visus k-elemenčius derinius iš n elementų, perstatinėkime kiekvieno derinio elementus visais galimais būdais. Taip mes sudarysime visus k-elemenčius gretinius iš n elementų; be to, kiekvienas gretinys bus gautas tik vieną kartą. Kadangi iš kiekvieno k-elemenčio derinio galima sudaryti $k!$ kėlinių, o tų derinių skaičius lygus C_n^k, tai turi būti teisinga tokia lygybė:

$$k!\,C_n^k = A_n^k.$$

Iš tos lygybės matyti, kad

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (6)$$

Nuostabu, kad gautoji formulė sutampa su formule

$$P(k,\ n-k)=\frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

pagal kurią surandamas skaičius kėlinių, sudaromų iš k vieno tipo elementų ir $n-k$ kito tipo elementų. Kitaip sakant,

$$C_n^k=P(k,\ n-k). \tag{7}$$

Kad ši lygybė yra teisinga, galima įsitikinti ir nesiremiant gretinių skaičiaus formule. Tam visus n elementų sustatysime į eilę ir kiekvieną derinį užšifruosime n nulių ir vienetų kėliniu. Būtent, jei kuris nors elementas priklauso deriniui, tai jo vietoje rašysime 1, o jei nepriklauso, tai rašysime 0. Pavyzdžiui, kai deriniai sudarinėjami iš raidžių a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, tai derinį {a, c, f, h, i} atitinka kėlinys 1010010110, o kėlinį 0111001001 – derinys {b, c, d, g, j}. Aišku, kad šitaip kiekvieną k-elementį derinį atitinka k vienetų ir $n-k$ nulių kėlinys, o kiekvieną k vienetų ir $n-k$ nulių kėlinį – koks nors k-elementis derinys; be to, skirtingus kėlinius atitinka skirtingi k-elemenčiai deriniai. Iš to ir matyti, kad k-elemenčių derinių iš n elementų skaičius sutampa su k vieno tipo elementų (vienetų) ir $n-k$ kito tipo elementų (nulių) kėlinių skaičiumi.

Taikant (6) formulę, lengva spręsti uždavinius, apie kuriuos kalbėjome šio skyrelio pradžioje. Šachmatų pirmenybėse gali būti

$$C_{20}^3=\frac{20!}{3!\,17!}=1140$$

skirtingų finalo dalyvių sudėčių. Futbolo pirmenybėse gali būti

$$C_{17}^4=\frac{17!}{4!\,13!}=2380$$

skirtingų „liūdnų“ rezultatų.

Štai dar vienas derinių pritaikymo uždavinys.

Keliais būdais galima pastatyti 8 bokštus šachmatų lentoje? Šis uždavinys skiriasi nuo 25 puslapyje išspręsto uždavinio, nes dabar nereikalaujama, kad bokštai negalėtų kirsti vienas kito. Todėl mums reikia tiesiog iš 64 šachmatų lentos langelių pasirinkti 8 bet kuriuos langelius. Tą padaryti yra

$$C_{64}^8=\frac{64!}{8!\,56!}=4\,426\,165\,368$$

būdai.

Panašiai įrodoma, kad lentoje, turinčioje m horizontalių ir n vertikalių, pastatyti k bokštų yra

$$C_{mn}^k=\frac{(mn)!}{k!\,(mn-k)!}$$

būdų. Jei būtų statoma ne k vienodų bokštų, o k skirtingų figūrų, tai būtų svarbu, kokia figūra kur statoma. Todėl tokiu atveju turėtume ne derinius, o gretinius; atsakymą sužinotume iš formulės

$$A_{mn}^k=\frac{(mn)!}{(mn-k)!}.$$

Genujos loterija

Praeitame amžiuje ir anksčiau klestėjo vadinamoji *Genujos loterija*, išlikusi kai kuriose šalyse iki šiol. Jos esmė buvo tokia. Loterijos dalyviai pirkdavo bilietus, kuriuose būdavo parašytas koks nors skaičius nuo 1 iki 90. Būdavo ir bilietų, kuriuose buvo parašyti du, trys, keturi arba penki skaičiai. Loterijos lošimo dieną iš maišelio, kuriame būdavo žetonai su skaičiais nuo 1 iki 90, ištraukdavo penkis žetonus. Išlošdavo tie, kurių visi skaičiai, parašyti biliete, sutapdavo su skaičiais, parašytais žetonuose*. Pavyzdžiui, jei biliete būdavo skaičiai 8, 21, 49, o ištrauktieji skaičiai – 3, 8, 21, 37, 49, tai bilietas išlošdavo; jei ištraukdavo, pavyzdžiui, skaičius 3, 7, 21, 49, 63, tai bilietas pralošdavo: juk skaičiaus 8 neištraukė.



Jei loterijos dalyvis pirkdavo bilietą su vienu skaičiumi, tai išlošęs jis gaudavo 15 kartų daugiau už bilieto kainą; jei su dviem skaičiais (ambo), – 270 kartų daugiau; jei su trim skaičiais (ternas), – 5500 kartų daugiau; jei su keturiais skaičiais (katernas), – 75 000 kartų daugiau; o jei su penkiais skaičiais (kvinas), – 1 000 000 kartų daugiau, negu kainuodavo bilietas.

Daug žmonių, norėdami lengvai praturtėti, dalyvaudavo toje loterijoje ir kiekviename tiraže pirkdavo terną arba ambo. Bet praturtėti beveik niekam nepavyko: loterija buvo taip apskaičiuota, kad išlošdavo tik jos rengėjai**.

Norint suprasti, kodėl taip atsitikdavo, reikia apskaičiuoti, kokią loterijos baigčių dalį sudaro „laimingosios“ baigtys (lošiant visų tipų bilietais). Visų galimų loterijos baigčių skaičių iš karto randame pagal (6) formulę. Juk iš maišelio, kuriame yra 90 žetonų, traukiami 5 žetonai,

---

* Tos loterijos variantas yra labai paplitęs loto žaidimas: čia irgi yra „statinaitės“ su skaičiais nuo 1 iki 90, o žaidėjų kortelėse išspausdintos trys eilutės po 5 skaičius eilutėje.

** Tos loterijos dalyvių pergyvenimus vaizdingai aprašė italų rašytoja Matilda Serao novelėje „Loterijos traukimas“; žr. knygą „Итальянские новеллы 1860 – 1914 г.г.“, ГИХЛ, 1960, p. 226–250.

o jų eilė neturi jokios reikšmės. Gaunami 5 elementų deriniai iš 90 elementų; jų skaičius lygus

$$C_{90}^{5}=\frac{90!}{5!\,85!}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Iš pradžių tarkime, kad loterijos dalyvis nusipirko bilietą su vienu numeriu. Kiek yra atvejų, kai jis išlošia? Su jo bilietu išlošiama tik tada, kai vienas ištrauktasis numeris sutampa su bilieto numeriu. Kiti keturi numeriai gali būti bet kokie. Tie keturi numeriai pasirenkami iš 89 likusių numerių. Todėl palankių kombinacijų skaičius

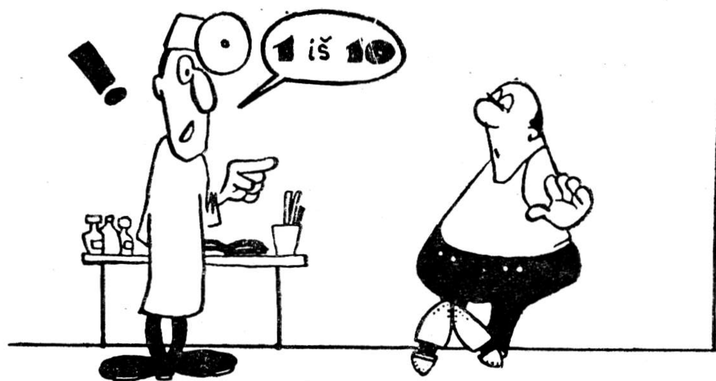
$$C_{89}^{4}=\frac{89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Matome, kad palankių kombinacijų skaičiaus santykis su visų kombinacijų skaičiumi

$$\frac{C_{89}^{4}}{C_{90}^{5}}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}.$$

Taigi lošėjas išloš apytiksliai vieną kartą iš aštuoniolikos. Kitaip sakant, jis užmokės už 18 bilietų, o išloš 15 kartų daugiau, negu kainuoja vienas bilietas: pinigus už tris bilietus loterijos rengėjai įsidės į kišenę.

Savaime aišku, nereikia galvoti, kad iš 18 atvejų lošėjas visada vieną kartą išloš. Kartais tarp dviejų išlošimų praeis 20 ar 30 tiražų, o kartais pavyks išlošti net dviejuose tiražuose iš eilės. Čia kalbama apie vidutinį išlošimų skaičių per ilgą laiką arba tiražą su dideliu dalyvių skaičiumi. Galvodami kitaip, padarytume klaidą, kuri priskiriama kažkokiam gydytojui: „Jūs sergate liga, nuo kurios išgyja vienas žmogus iš dešimties. Kadangi 9 ligoniai, kuriuos aš gydžiau nuo tos ligos, jau numirė, tai Jūs tikrai išgysite!“



Dabar apskaičiuokime, kiek šansų išlošti ambo. Šiuo atveju jau du turimieji skaičiai turi būti ištraukiami iš maišelio, o kiti trys numeriai gali būti bet kokie. Kadangi juos galima pasirinkti iš 88 likusių numerių, tai, lošiant ambo, „laimingų“ baigčių skaičius

$$C_{88}^{3}=\frac{88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

„Laimingų“ atvejų skaičiaus su visų galimų atvejų skaičiumi santykis

$$\frac{C_{88}^{3}}{C_{90}^{5}}=\frac{4\cdot5}{90\cdot89}=\frac{2}{801}.$$

Čia iš 801 baigties jau tik dvi baigtys yra išlošiamosios. Kadangi laimėjimas tiktai 270 kartų didesnis už bilieto kainą, tai iš kiekvienų 801 ambo bilietų pinigus už 261 bilietą loterijos rengėjai įsideda į kišenę. Aišku, loterijos dalyviams lošti ambo dar labiau neapsimoka, negu lošti „paprastą vienetuką“.

Visiškai neapsimoka lošti terną, katerną ir kviną. Lošiant terną, palankių baigčių skaičiaus su visų galimų baigčių skaičiumi santykis

$$\frac{C_{87}^{2}}{C_{90}^{5}}=\frac{3\cdot4\cdot5}{90\cdot89\cdot88}=\frac{1}{11\,748},$$

lošiant katerną, –

$$\frac{C_{86}^{1}}{C_{90}^{5}}=\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\frac{1}{511\,038},$$

o lošiant kviną, –

$$\frac{1}{C_{90}^{5}}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}=\frac{1}{43\,949\,268}.$$

Tuo tarpu išlošusiems mokama tik 5500, 75 000 ir 1 000 000 kartų daugiau. Apskaičiuokite patys, kiek nuostolių turėdavo loterijos dalyviai šiomis sąlygomis.

Pyragaičių pirkimas

Konditerijos parduotuvėje yra 4 rūšių pyragaičių: napoleonų, eklerų, smėlinių ir sluoksninių. Keliais būdais galima nusipirkti 7 pyragaičius?

Šis uždavinys skiriasi nuo tų, kuriuos sprendėme iki šiol. Tai nėra gretinių su pasikartojimais uždavinys, nes eilė, kuria sudedame pyragaičius į dėžutę, neturi svarbos. Todėl jis artimesnis derinių uždaviniams. Bet nuo derinių uždavinių jis skiriasi tuo, kad junginyje gali būti pasikartojančių elementų (pavyzdžiui, galima nusipirkti 7 eklerus). Tokie uždaviniai vadinami *derinių su pasikartojimais* uždaviniais.

Spręsdami pateiktąjį uždavinį, darysime šitaip. Kiekvieną pirkinį užšifruosime nuliais ir vienetais. Pradžioje parašysime tiek vienetų, kiek pirkinyje yra napoleonų. Paskui, skirdami napoleonus nuo eklerų, parašysime nulį, o po jo – tiek vienetų, kiek nupirkta eklerų. Toliau vėl rašysime nulį (jei pirkinyje nėra nė vieno eklero, tai reiškinyje bus du vienas po kito einantys nuliai). Po to parašysime tiek vienetų, kiek nupirkta smėlinių pyragaičių, vėl parašysime nulį ir pagaliau – tiek vienetų, kiek nupirkta sluoksninių pyragaičių. Pavyzdžiui, jei nupirkti 3 napoleonai, 1 ekleras, 2 smėliniai ir 1 sluoksninis pyragaitis, tai gausime tokį užrašą: 1110101101. Jei nupirkti 2 napoleonai ir 5 smėliniai pyragaičiai, tai susidarys toks užrašas: 1100111110. Suprantama, kad šitaip skirtingus pirkinius atitinka skirtingos kombinacijos iš 7 vienetų ir 3 nulių. Atvirkščiai, kiekvieną 7 vienetų ir 3 nulių kombinaciją atitinka koks nors

pirkinys. Pavyzdžiui, kombinaciją 0111011110 atitinka 3 eklerų ir 4 smėlinių pyragaičių pirkinys.

Vadinasi, skirtingų pirkinių skaičius yra lygus skaičiui kėlinių su pasikartojimais, kuriuos galima sudaryti iš 7 vienetų ir 3 nulių. Kaip buvo aiškinama 28–29 puslapyje, tas skaičius

$$P(7,\ 3)=\frac{10!}{7!\,3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120.$$

Tą patį rezultatą galėtume gauti ir kitokiu būdu. Kiekvieno pirkinio pyragaičius išdėstykime tokia tvarka: napoleonai, eklerai, smėliniai, sluoksniniai, o paskui juos sunumeruokime. Bet, numeruodami eklerus, jų numerius padidinkime 1 vienetu; smėlinių numerius padidinkime 2 vienetais, o sluoksninių pyragaičių numerius – trim vienetais (prie napoleonų numerių nieko nepridėsime). Pavyzdžiui, kai bus nupirkti 2 napoleonai, 3 eklerai, 1 smėlinis ir 1 sluoksninis pyragaitis, tų pyragaičių numeriai bus tokie: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. Savaime aišku, kad šiuo atveju didžiausias numeris bus lygus 10 (paskutinio sluoksninio pyragaičio numeris yra $7+3=10$), o mažiausias numeris lygus 1 (tuo numeriu žymimas pirmasis napoleonas). Be to, nė vienas numeris nepasikartoja. Atvirkščiai, kiekvieną didėjančią seką, sudarytą iš 7 skaičių nuo 1 iki 10, atitinka koks nors pirkinys. Pavyzdžiui, seką 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 atitinka 4 eklerų ir 3 smėlinių pyragaičių pirkinys. Norint tuo įsitikinti, reikia iš parašytųjų numerių paeiliui atimti skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Gausime skaičius 1, 1, 1, 1, 2 2, 2, t. y. 4 vienetus ir 3 dvejetus. Kadangi vienu vienetu didinome eklerų numerius, o dviem – smėlinių pyragaičių numerius, tai turime 4 eklerus ir 3 smėlinius pyragaičius.

Nurodytuoju būdu gauname tik didėjančias skaičių sekas, todėl kiekvieną tokią seką visiškai apibrėžia ją sudarantys skaičiai. Vadinasi, tokių sekų, turinčių po 7 narius, skaičius lygus skaičiui derinių, sudarytų iš 10 elementų (skaičių nuo 1 iki 10) po 7. Tų derinių skaičius randamas šitaip:

$$C_{10}^{7}=\frac{10!}{7!\,3!}=120.$$

Gavome tą patį rezultatą.

Deriniai su pasikartojimais

Jau sakėme, kad ką tik išnagrinėtasis uždavinys priklauso derinių su pasikartojimais uždavinių tipui. Bendroji tų uždavinių formuluotė yra tokia:

Turime n skirtingų tipų daiktus. Kiek k-elemenčių junginių galima sudaryti iš tų daiktų, jei nekreipiama dėmesio į elementų tvarką junginyje (kitaip sakant, skirtinguose junginiuose turi būti bent vienas skirtingas daiktas)?

Bendrasis uždavinys sprendžiamas tuo pačiu metodu, kaip ir pyragaičių uždavinys. Būtent, kiekvieną junginį reikia užšifruoti nuliais ir vienetais: kiekvienam tipui rašyti tiek vienetų, kiek to tipo daiktų yra junginyje, o skirtingus tipus skirti vienas nuo kito nuliais (be to, kai kokio

nors tipo daiktų visai nėra junginyje, rašyti du ar daugiau nulių iš eilės). Tokiu būdu gausime tiek vienetų, kiek elementų sudaro junginį, t. y. k vienetų, o nulių skaičius bus vienetu mažesnis už tipų skaičių, t. y. $n-1$ nulių. Vadinasi, gausime kėlinius su pasikartojimais iš k vienetų ir $n-1$ nulių. Skirtingus junginius atitiks skirtingi vienetų ir nulių kėliniai, o kiekvieną tokį kėlinį – vienas junginys. Taigi k-elemenčių derinių iš n tipų elementų su pasikartojimais skaičius $\bar{C}_n^k$ lygus kėlinių iš $n-1$ nulių ir k vienetų su pasikartojimais skaičiui $P(k, n-1)$. Kadangi

$$P(k, n-1)=\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!},$$

tai

$$\bar{C}_n^k=\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}=C_{n+k-1}^k.$$

Šitą formulę galima išvesti ir kitu būdu. Reikia kiekvieno derinio elementus išdėstyti pagal tipus (pradžioje – visi pirmojo tipo elementai, po jų – antrojo tipo ir t. t.). Paskui visi derinio elementai sunumeruojami, prie antrojo tipo elementų numerių pridedant po 1, prie trečiojo tipo – po 2 ir t. t. Tada iš kiekvieno derinio su pasikartojimais gausime derinį be pasikartojimų, sudarytą iš skaičių $1, 2, \ldots, n+k-1$; be to, kiekvienas gautasis derinys turės k elementų. Iš to vėl matyti, kad

$$\bar{C}_n^k=C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \tag{8}$$

Pasitaiko uždavinių, kuriuose deriniai su pasikartojimais turi tenkinti papildomą sąlygą – juose turi būti r nurodytų tipų elementai ($r\leqslant n$). Tie uždaviniai lengvai pakeičiami išspręstuoju uždaviniu. Norėdami užtikrinti, kad derinyje būtų r nurodytųjų tipų elementai, iš pat pradžių imsime po vieną kiekvieno nurodytojo tipo elementą. Tuo pačiu k-elemenčiame derinyje bus užimta r vietų. Likusias vietas (jų skaičius lygus $k-r$) galima užpildyti bet kokiais n tipų elementais. Todėl nurodytosios rūšies kombinacijų yra tiek pat, kiek ir derinių su pasikartojimais iš n elementų, kai kiekvienas derinys turi po $k-r$ elementų, t. y.

$$\bar{C}_n^{k-r}=C_{n+k-r-1}^{k-r}.$$

Atskiru atveju, kai $n\leqslant k$ ir reikalaujama, kad visuose k-elemenčiuose deriniuose su pasikartojimais būtų bent po vieną kiekvieno tipo elementą, gauname C_{k-1}^{k-n} kombinacijų.

Vėl futbolo pirmenybės

Išnagrinėjome gretinių, kėlinių ir derinių uždavinius. Dažnai tenka susidurti su įvairių tipų kombinacijomis. Išspręskime tokį uždavinį.

Dvi TSRS futbolo pirmenybių baigtis pavadinkime *iš esmės vienodomis*, kai tose baigtyse sutampa aukso, sidabro ir bronzos medalių laimėtojai ir keturios komandos, iškrintančios iš aukščiausios lygos. *Reikia*

apskaičiuoti, kiek pirmenybių baigčių yra iš esmės skirtingų (kaip ir anksčiau, galvojame, kad pirmenybėse dalyvauja 17 komandų).

Jau žinome, kad paskirstyti medalius yra $A_{17}^3 = 17 \cdot 16 \cdot 15$ būdų (žr. p. 23). Po medalių įteikimo lieka 14 komandų, iš kurių 4 turi palikti aukščiausiąją lygą. Kadangi iškrentančių komandų tvarka nesvarbi, tai yra $C_{14}^4 = \frac{14!}{4!\,10!}$ galimų kombinacijų. Iš dauginimo taisyklės sužinome, kad iš esmės skirtingų pirmenybių baigčių skaičius lygus

$$A_{17}^3 \cdot C_{14}^4 = 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot \frac{14!}{4!\,10!} = \frac{17!}{4!\,10!} = 4\,084\,080.$$

Tą patį rezultatą galima gauti ir kitu būdu. Visų skirtingų baigčių skaičius (atmetus atvejus, kai dalijamasi vienomis ar kitomis vietomis) lygus $P_{17} = 17!$. Tačiau, perstatinėdami komandas, užėmusias vietas nuo 4-osios iki 13-osios, ir komandas, užėmusias vietas nuo 14-osios iki 17-osios, gauname iš esmės vienodas pirmenybių baigtis. Tokių kėlinių skaičius lygus $10! \cdot 4!$. Vadinasi, skirtingų (iš esmės) baigčių skaičių rasime iš formulės $\frac{17!}{10!\,4!}$.

Sakykime, kad apie pirmenybių rezultatus norima pranešti telegrama, sudaryta iš k taškų ir brūkšnių. *Kiek ženklų mažiausiai reikia tokiam pranešimui?* Mes jau žinome, kad iš k taškų ir brūkšnių galima sudaryti 2^k skirtingų kombinacijų. Todėl minimalus skaičius ženklų, kuriais galima perduoti reikalingąją informaciją, turi tenkinti nelygybę

$$2^k \geqslant 4\,084\,080.$$

Iš tos nelygybės sužinome, kad $k \geqslant 22$. Vadinasi, perduodant informaciją apie pirmenybių rezultatus taškais ir brūkšniais, reikės ne mažiau kaip 22 ženklų.

Savaime aišku, kad, perduodant informaciją apie rungtynių rezultatus, taip neskaičiuojama. Bet lengva įsivaizduoti situaciją, kurioje informacijos perdavimas yra susijęs su dideliais techniniais sunkumais (pavyzdžiui, perduodant fotonuotrauką iš kosminio laivo), o kiekvienas ženklas vertinamas „aukso svoriu“. Tada tenka ištirti visus galimus perdavimo variantus ir iš jų pasirinkti ekonomiškiausią. Tokius klausimus nagrinėjanti matematikos šaka vadinama *informacijos teorija*.

Derinių savybės*

Skaičiai C_n^k turi daug nuostabių savybių. Tas savybes galima įrodinėti įvairiai. Kai kada patogiausia tiesiog taikyti formulę

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (9)$$

---

* Pirmą kartą skaitant, šio skyriaus pabaigą galima praleisti. Tačiau čia išvestomis lygybėmis $C_n^k = C_n^{n-k}$ ir $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ toliau dažnai remsimės.

Tačiau dažnai pavyksta įrodyti teiginį, samprotaujant kombinatoriškai: apskaičiuojame kokio nors tipo junginių skaičių ir suskirstome tuos junginius į keletą klasių, neturinčių bendrų elementų. Paskui apskaičiuojame, kiek junginių yra kiekvienoje klasėje. Sudėję gautuosius skaičius, vėl gauname visų tiriamojo tipo junginių skaičių. Iš to ir išplaukia ieškomasis sąryšis.

Pradėsime nuo paties paprasčiausio sąryšio

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{10}$$

Jį tiesiog gauname iš (9) formulės. Juk, jei toje formulėje skaičių k pakeisime skaičiumi $n-k$, o $n-k$ – skaičiumi $n-(n-k)=k$, tai dauginamieji, parašyti (9) trupmenos vardiklyje, tik pasikeis vietomis.

Tačiau (10) lygybę galima įrodyti, ir nesiremiant derinių skaičiaus formule. Jei iš n skirtingų elementų sudarysime kokį nors k-elementį derinį, tai liks papildomasis derinys iš $n-k$ elementų, o kiekvieną $(n-k)$-elementį derinį atitiks vienas k-elementis derinys. Vadinasi, k-elemenčiai deriniai ir $(n-k)$-elemenčiai deriniai sudaro vienas kitą papildančių derinių poras. Todėl abiejų derinių yra po lygiai: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Beveik taip pat lengva išvesti ir šitokį sąryšį:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \tag{11}$$

Tuo tikslu sudarykime visus k-elemenčius derinius iš n elementų $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ir suskirstykime tuos derinius į dvi klases. Pirmajai klasei priklausys deriniai, kuriuose yra elementas a_n, o antrajai – deriniai, kuriuose to elemento nėra. Jei iš bet kurio pirmosios klasės derinio išmesime elementą a_n, tai liks $(k-1)$-elementis derinys, sudarytas iš elementų $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Tokių derinių skaičius lygus C_{n-1}^{k-1}. Todėl pirmajai klasei priklauso C_{n-1}^{k-1} derinių. Antrosios klasės deriniai yra k-elemenčiai deriniai, sudaryti iš $n-1$ elementų $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Todėl jų skaičius lygus C_{n-1}^k. Kadangi kiekvienas k-elementis derinys iš elementų $a_1, \ldots, a_n$ priklauso vienai ir tik vienai iš tų dviejų klasių, o visų tų derinių skaičius lygus C_n^k, tai (11) lygybė teisinga.

Panašiu metodu įrodysime, kad teisinga tokia lygybė:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{12}$$

Prisiminkime, kad 2^n – skaičius n-elemenčių gretinių su pasikartojimais, kuriuos galima sudaryti iš dviejų tipų elementų. Visus tuos gretinius suskirstysime į klases, k-tajai klasei priskirdami tuos gretinius, kuriuose yra k pirmojo tipo elementų ir $n-k$ antrojo tipo elementų. Tada k-tosios klasės gretiniai bus ne kas kita, kaip visi kėliniai, sudaryti iš k pirmojo tipo elementų ir $n-k$ antrojo tipo elementų. Mes žinome, kad tokių kėlinių skaičius lygus $P(k, n-k)$, o $P(k, n-k) = C_n^k$ (žr. p. 29 ir 32). Vadinasi, visoms klasėms priklausančių gretinių skaičius lygus sumai $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$. Antra vertus, tas pats skaičius lygus 2^n. Vadinasi, įrodėme, kad (12) lygybė teisinga.

Visiškai panašiai galima įrodyti, kad

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=n} P(n_1, n_2, n_3)=3^n, \quad (13)$$

jei sumuojama, imant visus skaičiaus n skirstinius į tris dėmenis, be to, kreipiamas dėmesys ir į dėmenų tvarką, t. y. sumoje yra, pavyzdžiui, ir $P(n_1, n_2, n_3)$, ir $P(n_2, n_3, n_1)$. Norint įsitikinti, kad (13) lygybė teisinga, reikia imti visus n-elemenčius gretinius, sudarytus iš trijų tipų elementų, ir tuos gretinius suskirstyti į vienodos sudėties klases (t. y. vienai klasei priklausą deriniai turi po vienodą kiekį pirmojo, antrojo ir trečiojo tipo elementų). Apskritai teisinga dar bendresnė lygybė

$$\sum_{n_1+\ldots+n_k=n} P(n_1, \ldots, n_k)=k^n, \quad (14)$$

jei sumuojama, imant visus skaičiaus n skirstinius į k dėmenų (atsižvelgiant ir į dėmenų tvarką).

Dabar imkime m-elemenčius derinius su pasikartojimais, sudarytus iš $n+1$ tipų elementų, sakykime, iš $n+1$ raidžių: $a, b, c, \ldots, x$. Tokių derinių skaičius lygus $\bar{C}_{n+1}^m = C_{n+m}^m$. Visus tuos derinius suskirstykime į klases, k-tajai klasei priskirdami derinius, kuriuose raidė a pasikartoja k kartų. Likusias vietas (jų liko $m-k$) gali užpildyti kitos raidės $b, c, \ldots, x$, kurių skaičius lygus n. Todėl k-tąją klasę sudaro tiek derinių, kiek $(m-k)$-elemenčių derinių su pasikartojimais galima sudaryti iš n tipų elementų, t. y. $C_{n+m-k-1}^{m-k}$ derinių. Vadinasi, visų derinių skaičius lygus sumai

$$C_{n+m-1}^m + C_{n+m-2}^{m-1} + \ldots + C_n^1 + C_{n-1}^0.$$

Be to, matėme, kad tas skaičius lygus C_{n+m}^m. Vadinasi, įrodėme lygybę

$$C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m. \quad (15)$$

Jei šioje lygybėje skaičių n pakeisime skaičiumi $n+1$, o m — skaičiumi $m-1$, tai, pasinaudoję (10) lygybe, gausime

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}. \quad (16)$$

Iš pastarosios lygybės, vietoj n paeiliui rašydami 1, 2, 3, gauname jos atskirus atvejus:

$$1+2+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}, \quad (17)$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+m(m+1)=\frac{m(m+1)(m+2)}{3}, \quad (18)$$

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+m(m+1)(m+2)=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}. \quad (19)$$

Taikant (17), (18) ir (19) formules, lengva apskaičiuoti natūrinių skaičių nuo 1 iki m kvadratų ir kubų sumas. (18) lygybę galima parašyti taip:

$$1^2+2^2+\ldots+m^2+1+2+\ldots+m=\frac{m(m+1)(m+2)}{3}.$$

Kadangi pagal (17) formulę $1+2+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}$, tai

$$1^2+2^2+\ldots+m^2=\frac{m(m+1)(m+2)}{3}-\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}. \quad (20)$$

Visiškai panašiai iš (19) lygybės gauname tokią lygybę:

$$1^3+2^3+\ldots+m^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}. \quad (21)$$

Skaitytojui siūlome tokiu pat metodu išvesti formules natūrinių skaičių aukštesniems laipsniams sumuoti.

Iš n tipų elementų sudarytus m-elemenčius derinius su pasikartojimais galima klasifikuoti, atsižvelgiant į tai, kelių tipų elementai sudaro tiriamąjį derinį. Kitaip sakant, pirmąją klasę sudarys deriniai, kurių visi elementai vienodi, antrąją klasę – deriniai iš dviejų tipų elementų, ..., n-tąją klasę – deriniai iš n tipų elementų (savaime aišku, kai $m<n$, gausime tik m klasių).

Apskaičiuokime, kiek derinių priklauso kiekvienai klasei. Derinį, priklausantį k-tajai klasei, galima pasirinkti dviem etapais. Iš pradžių pasirenkame k konkrečių tipų, kurių elementai sudaro tą derinį. Kadangi visų tipų skaičius lygus n, tai minėtam pasirinkimui yra C_n^k būdų. Po to, kai elementų tipai jau pasirinkti, reikia iš tų k^n tipų elementų sudaryti m-elemenčius derinius su pasikartojimais, kuriuose būtų kiekvienas iš k pasirinktųjų tipų. Mes jau įrodėme (žr. p. 37), kad tokių derinių su pasikartojimais skaičius lygus $C_{m-1}^{m-k}=C_{m-1}^{k-1}$.

Remdamiesi dauginimo taisykle, sužinome, kad k-tąją klasę sudaro $C_n^k C_{m-1}^{k-1}$ derinių. Sudėję visus skaičius, reiškiančius, kiek derinių yra sudarytose klasėse, gausime skaičių m-elemenčių derinių su pasikartojimais, sudarytų iš n tipų elementų, t.y. skaičių C_{m+n-1}^m. Šitokiu būdu įrodėme lygybę

$$C_n^1 C_{m-1}^0+C_n^2 C_{m-1}^1+\ldots+C_n^n C_{m-1}^{n-1}=C_{m+n-1}^m. \quad (22)$$

Jei $m<n$, tai paskutinis tos sumos dėmuo bus $C_n^m C_{m-1}^{m-1}$. Gautąją lygybę patogiau rašyti kitaip, kiekviename dėmenyje skaičių C_n^k pakeičiant skaičiumi C_n^{n-k}. Tada gausime

$$C_n^{n-1} C_{m-1}^0+C_n^{n-2} C_{m-1}^1+\ldots+C_n^0 C_{m-1}^{n-1}=C_{m+n-1}^{n-1}. \quad (23)$$

Čia kiekvieno dėmens, parašyto kairėje lygybės pusėje, viršutinių indeksų suma lygi $n-1$, o apatinių $n+m-1$. Be to, apatiniai indeksai nesikeičia, o viršutiniai keičiasi. Tą lygybę galima parašyti ir kitaip:

$$C_p^0 C_{n-p}^m+C_p^1 C_{n-p}^{m-1}+\ldots+C_p^m C_{n-p}^0=C_n^m. \quad (23')$$

Dabar išvesime analogišką formulę, kurioje sumuojant keičiasi ir apatiniai indeksai. Imsime p skirtingų balsių ir $n-p$ skirtingų priebalsių ir iš jų sudarysime visus m-elemenčius derinius su pasikartojimais. Šiuos derinius suskirstysime į klases, k-tajai klasei priskirdami derinius, kuriuose yra k balsių ir $m-k$ priebalsių. Sužinosime, kiek derinių priklauso k-tajai klasei. Kiekvienas tos klasės derinys suskyla į k-elementį derinį (su pasikartojimais), sudarytą iš p balsių, ir $(m-k)$-elementį derinį (su pasikar-

tojimais), sudarytą iš $n-p$ priebalsių. Todėl k-toje klasėje yra C_{k+p-1}^{k} $C_{m+n-p-k-1}^{m-k}$ derinių. Vadinasi, visų tiriamųjų derinių skaičius lygus

$$C_{p-1}^{0} C_{m+n-p-1}^{m} + C_{p}^{1} C_{m+n-p-2}^{m-1} + \ldots + C_{m+p-1}^{m} C_{n-p-1}^{0}.$$

Antra vertus, tie deriniai yra visi galimi m-elemenčiai deriniai su pasikartojimais iš n skirtingų tipų elementų; todėl jų skaičius lygus C_{m+n-1}^{m}. Taigi gavome tapatybę

$$C_{p-1}^{0} C_{m+n-p-1}^{m} + C_{p}^{1} C_{m+n-p-2}^{m-1} + \ldots + C_{m+p-1}^{m} C_{n-p-1}^{0} = C_{m+n-1}^{m}. \quad (24)$$

Parašysime gautąją tapatybę taip, kad sumuojant keistųsi tik apatiniai indeksai. Tam pakeisime visus dėmenis, taikydami tapatybę $C_r^q = C^{r-q}$. Tada gausime

$$C_{p-1}^{p-1} C_{m+n-p-1}^{n-p-1} + C_{p}^{p-1} C_{m+n-p-2}^{n-p-1} + \ldots + C_{m+p-1}^{p-1} C_{n-p-1}^{n-p-1} = C_{m+n-1}^{n-1}.$$

Tą formulę galima parašyti kitaip*, būtent,

$$C_{p}^{p} C_{m-n}^{n-p} + C_{p+1}^{p} C_{m-p-1}^{n-p} + \ldots + C_{m-n+p}^{p} C_{n-p}^{n-p} = C_{m+1}^{n+1}. \quad (24')$$

Matome, kad šioje sumoje viršutiniai indeksai nesikeičia, o apatiniai keičiasi; be to, kiekvieno nario viršutinių indeksų suma lygi n, o apatinių — m.

Atkreipsime dėmesį į anksčiau gautos (23) formulės atskirą atvejį. Jei tarsime, kad $n-p=m$, tai iš tos lygybės gausime

$$C_{p}^{0} C_{m}^{0} + C_{p}^{1} C_{m}^{1} + \ldots + C_{p}^{m} C_{m}^{m} = C_{p+m}^{m}. \quad (25)$$

Atskiru atveju, kai $p=m$, ta lygybė bus tokia:

$$(C_{p}^{0})^2 + (C_{p}^{1})^2 + \ldots + (C_{p}^{p})^2 = C_{2p}^{p}. \quad (26)$$

Aptartąsias tapatybes galima apibendrinti. Paimkime aibę, sudarytą iš q-tipų elementų: n_1 pirmojo tipo elementų, n_2 antrojo tipo elementų, ..., n_q q-tojo tipo elementų. Vieno tipo elementai skiriasi vienas nuo kito (pavyzdžiui, tipą apsprendžia daikto spalva, o vienodos spalvos daiktai yra skirtingos formos).

Iš tos aibės elementų sudarysime visus m-elemenčius derinius, kuriuos klasifikuosime, atsižvelgdami į jų sudėtį, t. y. atsižvelgdami į tai, kiek derinyje yra pirmojo, antrojo, ..., q-tojo tipo elementų. Vadinasi, kiekviena klasė apibūdinama natūrinių skaičių sistema $(m_1, m_2, \ldots, m_q)$, kurios elementai tenkina nelygybes $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$ $(i=1, 2, \ldots, q)$ ir lygybę $m_1+m_2+\ldots+m_q=m$. Klasę sudaro deriniai, kuriuose yra m_1 pirmojo tipo elementų, m_2 antrojo tipo elementų, ..., m_q q-tojo tipo elementų. Tokią klasę žymėsime $A(m_1, \ldots, m_q)$.

Iš dauginimo taisyklės matyti, klasėje $A(m_i, \ldots, m_q)$ yra $C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_q}^{m_q}$ derinių. Sudėję visus skaičius, reiškiančius, kiek derinių yra kiekvienoje klasėje, gauname tapatybę

$$\sum C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_q}^{m_q} = C_{n}^{m}, \quad (27)$$

kurioje $n=n_1+n_2+\ldots+n_q$; sumuojama, imant visas natūrinių skaičių sistemas $(m_1, m_2, \ldots, m_q)$, kurių $m_1+m_2+\ldots+m_q=m$.

---

* Skaičių p keičiame skaičiumi $p+1$, skaičių n — skaičiumi $n+1$, o m — skaičiumi $m-n$.

Imdami derinius su pasikartojimais, gauname analogišką tapatybę

$$\sum C_{n_1+m_1-1}^{m_1} C_{n_2+m_2-1}^{m_2} \dots C_{n_q+m_q-1}^{m_q} = C_{n+m-1}^{m}, \tag{28}$$

kurioje irgi $n = n_1 + n_2 + \dots + n_q$, o sumuojama pagal tokias pat skaičių sistemas $(m_1, m_2, \dots, m_q)$.

Sužinosime dar vieną derinių savybę. Turime tapatybę

$$C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m, \tag{29}$$

kurią lengva patikrinti kombinatorikos metodais. Tam reikia iš n skirtingų elementų pasirinkti k elementų, o iš likusiųjų $n-k$ elementų paimti dar $m-k$ elementų. Tokiu būdu iš n elementų bus sudarytas m-elementis derinys. Kai k – fiksuotas skaičius, tą procesą atlikti yra $C_n^k C_{n-k}^{m-k}$ būdų. Nesunku įsitikinti, kad šitaip kiekvieną m-elementį derinį (jų yra C_n^m) gausime C_m^k kartų. Iš to ir išplaukia (29) tapatybė.

Parašykime lygybes, kurios gaunamos iš (29) tapatybės, vietoj k rašant skaičius 0, 1, ..., m, ir tas lygybes sudėkime. Kadangi pagal (12) formulę

$$C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^m = 2^m,$$

tai sudėję gausime tapatybę

$$C_n^0 C_n^m + C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_n^m C_{n-m}^0 = 2^m C_n^m,$$

arba

$$C_n^0 C_n^{n-m} + C_n^1 C_{n-1}^{n-m} + \dots + C_n^m C_{n-m}^{n-m} = 2^m C_n^m. \tag{30}$$

Atskiras priskirties ir išskirties formulės atvejis

Daugelį derinių savybių aptinkame, taikydami priskirties ir išskirties formulę (žr. p. 19). Mums bus reikalingas tos formulės atskiras atvejis. Sakykime, kad elementų, kuriems būdingos savybės $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, skaičius $N(\alpha_1 \dots \alpha_k)$ priklauso ne nuo pačių savybių, bet tik nuo savybių skaičiaus, t. y. tarkime, kad

$$N(\alpha_1) = \dots = N(\alpha_n),$$

$$N(\alpha_1 \alpha_2) = N(\alpha_1 \alpha_3) = \dots = N(\alpha_{n-1} \alpha_n),$$

$$N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4) = \dots = N(\alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n)$$

ir t. t. Tada visi sumos $N(\alpha_1) + \dots + N(\alpha_n)$ dėmenys lygūs vienam skaičiui, kurį žymėsime $N^{(1)}$. Kadangi toje sumoje yra n dėmenų, tai ji lygi $nN^{(1)} = C_n^1 N^{(1)}$. Panašiai įsitikinsime, kad

$$N(\alpha_1 \alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_3) + \dots + N(\alpha_{n-1} \alpha_n) = C_n^2 N^{(2)},$$

jei $N^{(2)} = N(\alpha_1 \alpha_2)$, ir apskritai

$$N(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k) + \dots + N(\alpha_{n-k+1} \dots \alpha_n) = C_n^k N^{(k)} \tag{31}$$

(savaime aišku, kad (31) suma apima visus k-elemenčius savybių derinius iš n turimųjų savybių).

Vadinasi, šiuo atveju priskirties ir išskirties formulė yra tokia:

$$N^{(0)} = N - C_n^1 N^{(1)} + C_n^2 N^{(2)} - \ldots + (-1)^n C_n^n N^{(n)}. \tag{32}$$

Alternuojančios derinių sumos

Dabar tirsime kitas derinių savybes. Tos savybės panašios į anksčiau išnagrinėtąsias, bet skiriasi nuo jų tuo, kad dėmenų ženklai kaitaliojasi: po pliuso eina minusas, po minuso – vėl pliusas ir t. t.

Paprasčiausia iš tų formulių yra tokia:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0. \tag{33}$$

Ši tapatybė gaunama iš (11) lygybės. Norint įrodyti, kad (33) lygybė teisinga, reikia pastebėti, kad $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$. Pirmąjį dėmenį pakeičiame C_{n-1}^0. Remdamiesi (11) formule, gauname $C_{n-1}^0 - C_n^1 = -C_{n-1}^1$. Analogiškai $-C_{n-1}^1 + C_n^2 = C_{n-1}^2$ ir t. t. Galų gale visi dėmenys vienas kitą panaikins.

Tą formulę galima išvesti ir kombinatorikos metodais. Parašykime visus derinius iš n elementų $a_1, \ldots, a_n$ ir padarykime tokią transformaciją: prie derinio, neturinčio raidės a_1, prirašykime tą raidę, o iš derinių, kuriuose yra raidė a_1, išbraukime ją. Lengva patikrinti, kad tokiu būdu vėl gausime visus derinius ir, be to, kiekvieną derinį tik vieną kartą. Tačiau po tokios transformacijos visi deriniai, kurių elementų skaičius buvo lyginis, virs deriniais, turinčiais nelyginį skaičių elementų, ir atvirkščiai. Vadinasi, derinių su lyginiu skaičiumi elementų yra tiek pat, kiek ir derinių su nelyginiu skaičiumi elementų (imame ir tuščią derinį, kuriame nėra nė vieno elemento). Tai ir išreiškiama (33) formule.

O dabar įrodysime, kad teisinga dar sudėtingesnė formulė

$$C_n^0 C_n^m - C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + C_n^2 C_{n-2}^{m-2} - \ldots + (-1)^m C_n^m C_{n-m}^0 = 0. \tag{34}$$

Imkime visus m-elemenčius derinius iš n elementų $a_1, \ldots, a_n$. Simbolį $(a_1, \ldots, a_k)$ pažymėkime tai, kad derinyje yra elementai $a_1, \ldots, a_k$. Tokių derinių skaičius $N(a_1, \ldots, a_k)$ lygus C_{n-k}^{m-k} (juose k vietų užima elementai $a_1, \ldots, a_k$, o į $m-k$ likusių vietų yra $n-k$ pretendentų). Visų derinių skaičius lygus C_n^m, o derinių, kurie neturi nė vienos savybės $(a_1), \ldots, (a_n)$, visai nėra (kiekviename m-elemenčiame derinyje yra kokių nors elementų). Todėl šiuo atveju $N = C_n^m$, $N^{(0)} = 0$, $N^{(k)} = C_{n-k}^{m-k}$. Jei tas reikšmes parašysime (32) formulėje, tai gausime (34) tapatybę.

Tokiu pat metodu, kai $m \geqslant n$, gaunamas sąryšis

$$C_n^0 C_{n+m-1}^m - C_n^1 C_{n+m-2}^{m-1} + C_n^2 C_{n+m-3}^{m-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n C_{m-1}^{m-n} = 0,$$

o kai $m < n$, – sąryšis

$$C_n^0 C_{n+m-1}^m - C_n^1 C_{n+m-2}^{m-1} + \ldots + (-1)^m C_n^m C_{n-1}^0 = 0. \tag{35}$$

Imkime m-elemenčius derinius su pasikartojimais iš elementų, sudarančių n rūšių $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Simboliu (a_k), $1 \leqslant k \leqslant n$ žymėsime tai, kad kai kurie derinio elementai priklauso rūšiai a_k (kitų rūšių elementų gali ja-

me būti, o gali ir nebūti). Tada $N(a_1, \ldots, a_k)$ – skaičius tokių derinių, kuriuose tikrai yra $a_1, \ldots, a_k$ elementų. Iš kiekvieno tokio derinio galima pašalinti po vieną rūšių $a_1, \ldots, a_k$ elementą. Po to gausime kokį nors $(m-k)$-elementį derinį su pasikartojimais iš elementų, priklausančių rūšims $a_1, \ldots, a_n$. Jei, atvirkščiai, prie kokio nors $m-k$-elemenčio derinio su pasikartojimais, sudaryto iš elementų, priklausančių rūšims $a_1, \ldots, a_n$, prijungsime po vieną elementą iš kiekvienos rūšies $a_1, \ldots, a_k$, tai gausime m-elementį derinį, kuriame tikrai bus rūšys $a_1, \ldots, a_k$. Iš to matyti, kad skaičius $N(a_1, \ldots, a_k)$ yra lygus skaičiui $(m-k)$-elemenčių derinių su pasikartojimais iš n rūšių elementų, t. y. $N(a_1, \ldots, a_k) = C_{n+m-k-1}^{m-k}$. Visų m-elemenčių derinių su pasikartojimais skaičius lygus C_{n+m-1}^{m}, o derinių, neturinčių nė vienos savybės (a_k), $1 \leqslant k \leqslant n$, nėra. Gautąsias reikšmes $N^{(0)}=0$, $N=C_{n+m-1}^{m}$ ir $N^{(k)}=C_{n+m-k-1}^{m-k}$ parašome (32) formulėje ir gauname (35) tapatybę.

Baigdami šį skyrių, įrodysime, kad tuo atveju, kai $m<n$, teisinga tokia tapatybė:

$$n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^m = 0. \qquad (36)$$

Imsime m-elemenčius gretinius su pasikartojimais iš n rūšių elementų ir simboliu (a_k) pažymėsime tai, kad gretinyje nėra rūšies a_k elementų. Tada $N(a_1, \ldots, a_k)$ – skaičius m-elemenčių gretinių su pasikartojimais, kuriuose nėra rūšių $a_1, \ldots, a_k$ elementų; kitaip sakant, juos sudaro $n-k$ rūšių $a_{k+1}, \ldots, a_n$ elementai. Tokių gretinių skaičius lygus $(n-k)^m$. Vadinasi, $N^{(k)}=N(a_1, \ldots, a_k)=(n-k)^m$. Visų gretinių skaičius lygus n^m.

Gretinių, kurie neturi nė vienos savybės (a_k), nėra. Iš tikrųjų, jei gretinys neturi nė vienos savybės (a_k), jame turi būti visų n rūšių elementai. Tai neįmanoma, nes gretinio elementų skaičius m yra mažesnis už n. Todėl $N^{(0)}=0$, ir gauname (36) tapatybę.

Čia išnagrinėjome keletą lygybių, siejančių skaičius C_n^k. Jas galima išvesti ir kitais būdais. V skyriuje papasakosime apie geometrinį tokių sąryšių įrodymo būdą, o VII skyriuje išdėstysime galingiausią įrodymo metodą – generuojančių funkcijų metodą. Tuo metodu galima išvesti ne tik visus sąryšius, išnagrinėtus šiame skyriuje, bet ir daugybę kitų įdomių sąryšių.

KOMBINATORIKOS UŽDAVINIAI SU APRIBOJIMAIS

Iki šiol sprendėme uždavinius, kurių junginiuose elementų eilė nebuvo varžoma jokiomis papildomomis sąlygomis: arba (kaip gretiniuose ir kėliniuose) elementai galėjo sudaryti bet kokią eilę, arba (kaip deriniuose) į eilę visai nebuvo atsižvelgiama. Dabar nagrinėsime uždavinius, kuriuose elementų eilė varžoma kokiais nors apribojimais.

Liūtai ir tigrai

Tramdytojui reikia išvesti 5 liūtus ir 4 tigrus į cirko areną. Keliais būdais galima sustatyti tuos žvėris į eilę, jei du tigrai negali eiti vienas paskui kitą?

Iš pradžių sustatykime visus liūtus, tarp jų palikdami tarpus. Tai padaryti yra $5!=120$ būdų. Tarpų skaičius lygus 4. Jei prie jų prijungsime dar dvi vietas – eilės priekyje ir užpakalyje, tai turėsime 6 vietas, į kurias galima pastatyti po vieną tigrą. Tokiu atveju visi tigrai bus atskirti vienas nuo kito. Kadangi į tigrų eilę irgi reikia atsižvelgti, tai jų paskirstymo

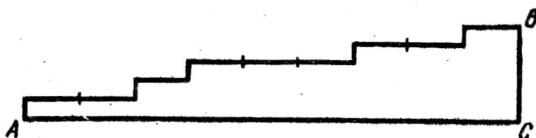


būdų skaičius lygus gretinių iš 6 po 4 skaičiui, t. y. $A_6^4=360$. Kombinuodami kiekvieną liūtų sustatymo būdą su kiekvienu tigrų sustatymo būdu, gauname $120 \cdot 360=43\ 200$ būdų plėšrūnams išvesti į areną.

Jei dresiruotojas turėtų n liūtų ir k tigrų, tai uždaviniui spręsti jis turėtų $P_n A_{n+1}^k = \frac{n!\,(n+1)!}{(n-k+1)!}$ būdų. Tai įmanoma tik tada, kai $k \leqslant n+1$: priešingu atveju du tigrai būtinai turės eiti vienas paskui kitą.

Laiptų statymas

Iš taško A į tašką B statomi laiptai (8 pav.). *Atstumas AC lygus* 4,5 m, *o atstumas CB* — 1,5 m. *Kiekvienos pakopos aukštis lygus* 30 cm, *o jos plotis — sveikas* 50 cm *kartotinis. Keliais būdais galima pastatyti laiptus*?



8 pav.

Iš sąlygos matyti, kad laiptuose turi būti 5 pakopos. Be to, yra 10 vietų, kuriose galima daryti pakopą, nes $4{,}5 : 0{,}5=9$. Vadinasi, iš 10 vietų reikia pasirinkti 5 vietas. Tą padaryti yra

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$$

būdai.

Apskritai, jei laiptuose turi būti k pakopų, o atkarpoje AC telpa n pakopų, tai pastatyti laiptus yra C_{n+1}^k būdų.

Šis uždavinys panašus į tramdytojo uždavinį: tramdytojas nenori vesti du tigrus vieną po kito, o laiptų statytojas negali daryti dvigubo aukščio pakopų. Bet tarp tų uždavinių yra esminis skirtumas. Tramdytojas turėjo atsižvelgti į tvarką, kuria buvo sustatyti tigrai: priekyje pastatyti tigrą Šachą — ne tas pats, kas priekyje pastatyti tigrą Akbarą. O laiptų statytojui visos vietos, kuriose daromas pakilimas, vienodos. Todėl laiptų statytojas turi mažiau pasirinkimo būdų, negu tramdytojas. Jei laiptai būtų 1,2 m aukščio ir 2,5 m ilgio, tai būtų 4 pakopos ir 6 vietos pakopoms daryti. Atsakymas būtų $C_6^4=15$. O tramdytojas analogišku atveju turi 43 200 variantų. Tai suprantama — 5 liūtus sukeisti vieną su kitu vietomis jis turi $5!=120$ būdų, o 4 tigrus $4!=24$ būdus; iš viso $120 \cdot 24 = 2880$ būdų. O $15 \cdot 2880=43\ 200$.

Laiptų uždavinį galima suformuluoti dar ir šitaip:

Kiek yra būdų parašyti n nulių ir k vienetų seką, kurioje nėra dviejų vienetų, einančių vienas po kito?

Iš tikrųjų bet kokius laiptus galima užšifruoti nulių ir vienetų seka: nulis reiškia laužtės kraštinę, einančią į dešinę, o vienetas — kraštinę, einančią aukštyn. Pavyzdžiui, iš laiptų, pavaizduotų 8 paveiksle, gauname

seką 100101001010010. Kadangi laiptuose nėra dvigubo aukščio pakopų, tai sekoje nėra dviejų vienetų, einančių vienas po kito. Vadinasi, skaičius sekų, sudarytų iš n nulių ir k vienetų taip, kad du vienetai neina vienas po kito, yra lygus laiptų skaičiui, t. y. C_{n-1}^{k}.

Knygų lentyna

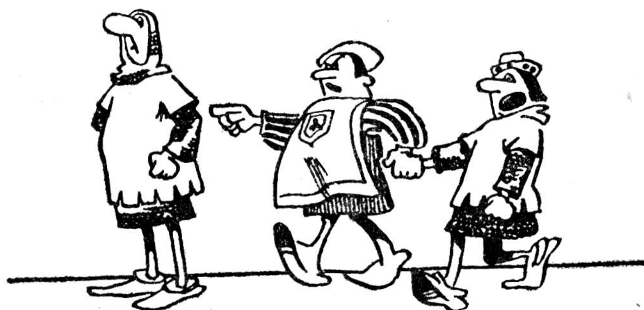
Knygų lentynoje stovi 12 *knygų. Keliais būdais galima iš jų pasirinkti* 5 *knygas, jei negalima imti gretimų knygų?*

Šį uždavinį suvedame į ką tik išspręstąjį. Kiekvieną knygų pasirinkimą užšifruokime nulių ir vienetų seka, būtent, kiekvienai paliktai knygai priskirkime 0, o kiekvienai paimtai – 1. Tada gausime 5 vienetų ir 7 nulių seką. Kadangi negalima imti gretimų knygų, tai gautojoje sekoje nebus dviejų vienas po kito einančių vienetų. Tačiau iš 5 vienetų ir 7 nulių galima sudaryti $C_8^5=56$ sekas, kuriose nėra dviejų vienetų, parašytų greta.

Apskritai, jei lentynoje stovi n knygų, o pasirenkama k knygų taip, kad neimama dviejų knygų, stovinčių greta, tai rinkiniui sudaryti yra C_{n-k+1}^{k} būdų. Iš to matyti, kad uždavinys išsprendžiamas tik tada, kai $2k-1 \leqslant n$.

Karaliaus Artūro riteriai

Apie apvalų stalą pas karalių Artūrą sėdi 12 riterių. Kiekvienas riteris kivirčijasi su abiem savo kaimynais. Reikia išrinkti 5 riterius užburtajai princesei vaduoti. Keliais būdais galima tai padaryti, jei pasirenkamieji riteriai negali būti vienas kito priešai?



Tas uždavinys panašus į knygų lentynos uždavinį, bet skiriasi nuo jo tuo, kad riteriai sėdi ne eilėje, o ratu. Tačiau jį lengva pakeisti uždaviniu, kai riteriai sėdi eilėje. Įsidėmėkime kurį nors riterį, pavyzdžiui, serą Lanselotą. Visos sudaromos riterių grupės susiskirsto į dvi klases: vienoms grupėms priklauso seras Lanselotas, o kitoms – nepriklauso. Suskaičiuokime, kiek grupių yra kiekvienoje klasėje.

Jei seras Lanselotas vyksta užburtosios princesės vaduoti, tai jo kaimynai iš kairės ir iš dešinės toje ekspedicijoje negali dalyvauti. Lieka 9 riteriai, iš kurių seras Lanselotas turi pasirinkti 4 palydovus. Kadangi Lanseloto kaimynai ekspedicijoje nedalyvauja, tai užtenka žiūrėti, kad 4 pasirenkamieji riteriai nesikivirčytų, t. y. bet kurie du pasirenkamieji riteriai nesėdėtų greta. Bet, paėmus serą Lanselotą ir pašalinus du jo kaimynus, riterių grandinė nutrūko, todėl galima sakyti, kad jie sėdi ne apie apvalų stalą, o vienoje eilėje. Tokiu atveju pasirinkti 4 riterius iš 9, laikantis nurodytųjų sąlygų, galima $C_6^4=15$ būdų. Vadinasi, pirmoje klasėje yra 15 kombinacijų.

Dabar apskaičiuokime, kiek kombinacijų yra antroje klasėje. Kadangi seras Lanselotas ekspedicijoje nedalyvauja, tai jį galima iš karto pašalinti iš apvaliojo stalo riterių. Tada riterių ir jų tarpusavio santykių grandinė nutrūksta: lieka 11 riterių, sudarančių eilę. Iš jų reikia pasirinkti 5 ekspedicijos dalyvius taip, kad tarp pasirinktųjų riterių nebūtų dviejų riterių, sėdinčių greta. Tai padaryti galima $C_7^5=21$ būdu. Vadinasi, visų galimų variantų skaičius lygus $15+21=36$.

Apskritai, *jei apie apvalų stalą sėdi n riterių ir reikia iš jų pasirinkti k riterių taip, kad į tą grupę nepatektų nė viena kaimynų pora, tai galima sudaryti* $C_{n-k-1}^{k-1}+C_{n-k}^{k}$ *tokių grupių.*

Šis teiginys įrodomas visiškai panašiai, kaip ir anksčiau. Visos galimos riterių grupės suskirstomos į dvi klases, atsižvelgiant į tai, ar jose dalyvauja seras Lanselotas, ar ne. Grupių, kuriose jis dalyvauja, yra C_{n-k-1}^{k-1}, o grupių, kuriose jo nėra, C_{n-k}^{k}. Lengva patikrinti, kad

$$C_{n-k-1}^{k-1}+C_{n-k}^{k}=\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}.$$

Pavyzdžiui, kai $n=12$, $k=5$, gauname

$$\frac{12}{7}\cdot C_7^5=\frac{12}{7}\cdot 21=36.$$

Mergina skuba į pasimatymą

Kadaise šalies ekranuose buvo rodoma tokia kino komedija. Joje buvo pasakojama apie poilsiautojų, pamiršusių namie pasus, nelaimes. Buvo nuspręsta pasiųsti jiems pasus paštu. Bet mergina iš pašto skyriaus skubėjo į pasimatymą ir beskubėdama supainiojo vokus: pirmojo pasas



atsidūrė voke su antrojo adresu, o antrojo – voke su pirmojo adresu. Laimė, kad jai nereikėjo pasiųsti 5 laiškų: tada ne dviem, bet penkiems vargšams būtų tekę nakvoti ant kietų suolų kurorto parke...

Beje, čia ne visiškai teisingai pasakyta: kai kurie pasai galėtų atsitiktinai patekti į savo vokus. Apskaičiuokime, *keliais atvejais mergina padarytų visišką painiavą ir niekas negautų savo paso.*

Šį uždavinį galima suformuluoti taip. *Imami visi skaičių* 1 2, 3, 4 *ir* 5 *kėliniai. Kiek yra tokių kėlinių, kuriuose nė vienas skaičius nestovi savo vietoje?*

Sprendžiame prijungties ir išskirties metodu (žr. p. 19). Kėlinio savybę, kai skaičius α jame stovi savo vietoje, žymėsime (α), o kėlinių, turinčių tą savybę, skaičių – simboliu N_α. Analogiškai kėlinių, turinčių ir savybę (α), ir savybę (β), skaičių žymėsime $N_{\alpha\beta}$; tuose kėliniuose α ir β stovi savo vietose. Pagaliau skaičių kėlinių, neturinčių nė vienos savybės (1), (2), (3), (4), (5), žymėsime $N^{(0)}$; tai bus kėliniai, kuriuose nė vienas skaičius nestovi savo vietoje. Pagal priskirties ir išskirties formulę turime

$$N^{(0)}=N-N_1-N_2-N_3-N_4-N_5+N_{12}+\ldots+N_{45}-$$
$$-N_{123}-\ldots-N_{345}+N_{1234}+\ldots+N_{2345}-N_{12345}. \quad (1)$$

Šioje formulėje $N=P_5$ – visų kėlinių iš 5 elementų skaičius (žr. p. 24).

Tokį uždavinį spręsti lengviau, nes savybės (1), (2), (3), (4) ir (5) yra visiškai ekvivalenčios. Todėl $N_1=N_2=\ldots=N_5$. Panašiai nusprendžiame, kad $N_{12}=N_{23}=\ldots=N_{45}$: juk vis tiek, ar savo vietose lieka skaičiai 1 ir 2, ar skaičiai 3 ir 4. Bet porų, kurias galima sudaryti iš skaičių 1, 2, 3, 4 ir 5, yra C_5^2 (savybės (1, 2) ir (2, 1) sutampa, todėl skaičių eilė poroje mums nerūpi).

Panašiai įsitikiname, kad yra C_5^3 trejetų, C_5^4 ketvertų ir C_5^5 penketų. Todėl (1) formulę galima parašyti taip:

$$N^{(0)}=N-C_5^1N^{(1)}+C_5^2N^{(2)}-C_5^3N^{(3)}+C_5^4N^{(4)}-C_5^5N^{(5)}. \quad (2)$$

(2) formulėje simboliu $N^{(k)}$ pažymėtas skaičius kėlinių, kuriuose k nurodytų skaičių stovi savo vietose. Baigiant spręsti šį uždavinį, reikia rasti $N^{(k)}$ reikšmes, kai $k=1, 2, 3, 4, 5$.

Simboliu $N^{(1)}$ pažymėta, kiek yra kėlinių, kuriuose nurodytasis skaičius, pavyzdžiui, 1 yra pasilikęs savo vietoje. Tačiau, kai skaičius 1 stovi savo vietoje, likusius skaičius galima perstatinėti $P_4=24$ būdais. Vadinasi, $N^{(1)}=P_4$. Jei skaičius 1 ir 2 paliksime savo vietose, tai likusius tris skaičius galėsime sukeitinėti vieną su kitu $P_3=6$ būdais. Todėl $N^{(2)}=$ $=P_3=6$. Analogiškai įsitikiname, kad

$$N^{(3)}=P_2=2,\quad N^{(4)}=P_1=1,\quad N^{(5)}=P_0=1.$$

Gautąsias $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$ ir $N^{(5)}$ reikšmes parašome (2) formulėje ir sužinome, kad

$$N^{(0)}=P_5-C_5^1P_4+C_5^2P_3-C_5^3P_2+C_5^4P_1-C_5^5P_0=120-5\cdot 24+$$
$$+10\cdot 6-10\cdot 2+5\cdot 1-1\cdot 1=44.$$

Vadinasi, 44 atvejais iš 120 nė vienas adresatas negautų savo paso.

Visiškai panašiai galima apskaičiuoti, kiek yra atvejų, kai vienas adresatas gauna savo pasą. Jei tuo laiminguoju būtų pirmasis adresatas, tai keturi likusieji gautų svetimus pasus. Tai gali atsitikti

$$P_4 - C_4^1 P_3 + C_4^2 P_2 - C_4^3 P_1 + C_4^4 P_0 = 9$$

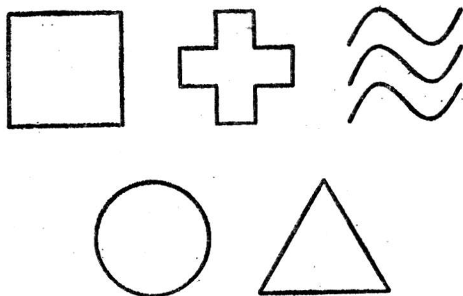
būdais. Kadangi tuo laiminguoju gali būti bet kuris adresatas, tai skaičius visų atvejų, kai vienas žmogus būtinai gaus jam adresuotą laišką, lygus $5 \cdot 9 = 45$.

Pasitikrinkite patys, kad du žmonės gaus savo pasą 20 atvejų, trys – 10 atvejų, keturi – 0 atvejų, penki – 1 atveju. Keturių rezultatas paaiškinamas tuo, kad, keturiems gavus jiems adresuotus laiškus, penktasis laiškas irgi bus pasiųstas teisingu adresu.

Vadinasi, 120 skirtingų kėlinių iš 5 elementų suskirstomi į tokias grupes: 44 kėliniuose nė vieno elemento nėra savo vietoje, 45 kėliniuose tik vienas elementas nėra pakeitęs savo vietos, 20 kėlinių du elementai nėra pakeitę savo vietų, 10 kėlinių trys elementai lieka savo vietose ir viename kėlinyje visi elementai stovi savo vietose.

Telepatijos seansas

Kai kurie žmonės teigia, kad jie sugebą skaityti mintis iš tolo. Tikrinant buvo daromi tokie eksperimentai. Viename kambaryje buvo imamos kokia nors eile vadinamosios Zenero figūros (9 pav.). Kitame kambaryje esąs telepatas turėjo pasakyti, kokia eile imamos tos figūros.



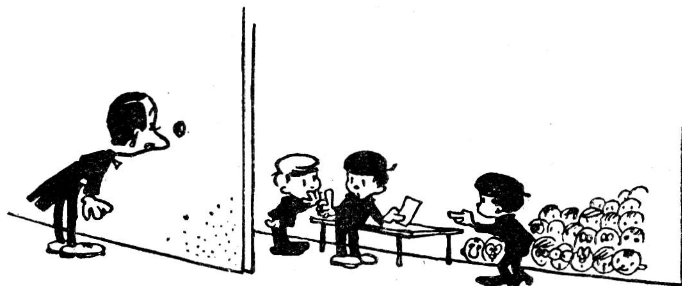
9 pav.

Tarsime, kad figūros imamos, nekartojant tos pačios figūros. Tada iš tų figūrų galima sudaryti $5! = 120$ skirtingų kėlinių. Seanso metu pasirenkamas vienas iš tų kėlinių. Telepatas pasako kitą tų figūrų kėlinį, ir jo pasisekimas yra tuo didesnis, kuo daugiau figūrų jis įspėja. Iš apskaičiavimų, kuriuos atlikome 50 – 51 puslapyje, matyti, kad, spėjant atsitiktinai, būtų maždaug tokie rezultatai: 44 atvejais iš 120 telepatas neatspėtų nė vienos figūros, 45 atvejais atspėtų vieną figūrą, 20 atvejų – dvi figūras, 10 atvejų – tris figūras, vienu atveju – visas penkias

figūras. Vidutiniškai atsitiktiniais spėliojimais teisingai pavadintų figūrų skaičius lygus

$$\frac{45+20\cdot 2+10\cdot 3+5}{120}=1,$$

t. y. atspėjama viena figūra iš penkių. Kai turime n skirtingų figūrų, vidutiniškai reikėtų atspėti vieną figūrą iš n. Jei sistemingai atspėjama daugiau figūrų, tai reikia kruopščiau ištirti tą reiškinį: ar susidūrėme su sukčiumi (kas dažnai pasitaiko), ar tas žmogus iš tikrųjų turi ypatingų gabumų.



Išsiaiškinsime, ar pasikeis vidutiniškai atspėjamų figūrų skaičius, kai leisime kartoti figūras. Tokiu atveju vietoj kėlinių turime gretinius su pasikartojimais. Iš n elementų galima sudaryti $(n-1)^n$ tokių gretinių, kuriuose nė vienas elementas nėra savo „teisėtoje" vietoje. Iš tikrųjų: pirmoje vietoje gali stovėti bet kuris elementas, išskyrus pirmąjį, antroje – bet kuris elementas, išskyrus antrąjį, ir t. t. Kitaip sakant, kiekvienai vietai užimti turime po $n-1$ kandidatų. Remdamiesi dauginimo taisykle, iš to sprendžiame, kad visų galimų kombinacijų skaičius lygus $(n-1)^n$.

Sužinokime, kiek yra atvejų, kai savo vietoje stovi tiksliai vienas elementas. Jei savo vietą užima, pavyzdžiui, pirmasis elementas, tai dar lieka $n-1$ vietų, kurias reikia užpildyti. Tada į kiekvieną vietą pretenduoja $n-1$ kandidatų (visi elementai, išskyrus „teisėtąjį tos vietos savininką"). Vadinasi, skaičius gretinių, kuriuose tik pirmasis elementas stovi savo vietoje, lygus $(n-1)^{n-1}$. Kadangi savo vietoje gali stovėti bet kuris iš n elementų, tai skaičius tų gretinių, kuriuose tik vienas elementas nėra pasislinkęs iš savo vietos, lygus $n(n-1)^{n-1}$. Visiškai panašiai įrodoma, kad skaičius tų gretinių, kuriuose k elementų stovi savo vietose, lygus $C_n^k\,(n-1)^{n-k}$.

Pavyzdžiui, turėdami penkis skirtingus elementus, gauname tokius rezultatus: skaičius gretinių, kuriuose visi elementai yra pasislinkę, lygus $4^5=1024$; gretinių, kuriuose tik vienas elementas stovi savo vietoje, yra $5\cdot 4^4=1280$; gretinių, kuriuose tik du elementai stovi savo vietose, yra $10\cdot 4^3=640$; trys – $10\cdot 4^2=160$; keturi – $5\cdot 4=20$ ir penki – $1\cdot 4^0=1$. Iš viso turime

$$1024+1280+640+160+20+1=3125$$

gretinių; tai sutampa su formule

$$\bar{A}_5^5 = 5^5 = 3125.$$

Spėliojant atsitiktinai, vidutiniškai atspėjamų figūrų skaičius lygus

$$\frac{1280+640\cdot 2+160\cdot 3+20\cdot 4+1\cdot 5}{3125}=1.$$

Gavome tą patį atsakymą: spėliojant atsitiktinai, galima atspėti vieną figūrą iš penkių; tai nepriklauso nuo to, ar leidžiama kartoti figūras, ar ne. Tačiau atspėjamų figūrų skaičiaus pasiskirstymas dabar jau bus kitoks. Jis nurodytas šioje lentelėje:

Atspėtų figūrų skaičius	Be pasikartojimų	Su pasikartojimais
0	0,366	0,328
1	0,375	0,410
2	0,167	0,205
3	0,083	0,051
4	0	0,006
5	0,009	0,000

Bendrasis poslinkio uždavinys*

Panašiai, kaip praeituose skyreliuose išnagrinėti uždaviniai, sprendžiamas ir bendrasis poslinkio uždavinys: *rasti skaičių D_n tokių kėlinių iš n elementų, kuriuose nė vienas elementas nestovi pradinėje vietoje.* Atsakymą apskaičiuosime pagal formulę

$$D_n = P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n =$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right). \qquad (3)$$

Skaitytojas, susipažinęs su eilučių teorija, pastebės, kad skliaustuose parašytasis reiškinys yra skaičiaus e^{-1} dėstinio eilute dalinė suma.

Apibendrinant (3) formulę, natūralu susitarti, kad $D_0 = 1$.

Skaičius tų kėlinių, kuriuose tik r elementų stovi pradinėse vietose, o $n-r$ likusiųjų elementų yra pakeitę vietą, reiškiamas formule

$$D_{n,r} = C_n^r D_{n-r}. \qquad (4)$$

Iš tikrųjų pirmiausia reikia pasirinkti r elementų, kurie turi pasilikti savo vietose. Tą padaryti yra C_n^r būdų. Po to $n-r$ likusių elementų galima perstatinėti bet kaip, tik nė vienas jų negali užimti pradinės vietos. Tą padaryti yra D_{n-r} būdų. Iš dauginimo taisyklės matyti, kad visų aptariamųjų kėlinių skaičius lygus $C_n^r D_{n-r}$.

* Pirmą kartą skaitant, šį skyrelį galima praleisti.

Visus kėlinius suskirstykime į klases, atsižvelgdami į tai, kiek nepasislinkusių elementų yra kėlinyje. Kadangi visų kėlinių skaičius lygus $n!$, tai gauname tokią tapatybę:

$$n! = \sum_{r=0}^{n} D_{n,r} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r D_{n-r} \qquad (5)$$

Kita tapatybė, siejanti $n!$ ir skaičius $D_{n,r}$, gaunama šitaip. Imame visus elementų $a_1, \ldots, a_n$ kėlinius (jų skaičius lygus $n!$) ir apskaičiuojame, kiek elementų visuose tuose kėliniuose stovi savo vietose. Skaičiuoti galima dviem būdais. Iš pradžių pastebėkime, kad, pavyzdžiui, elementui a_1 esant savo vietoje, likusius elementus galima perstatinėti $P_{n-1} = (n-1)!$ būdais. Todėl yra $(n-1)!$ kėlinių, kuriuose elementas a_1 stovi pirmoje vietoje. Panašiai turi būti $(n-1)!$ kėlinių, kuriuose elementas a_2 stovi antroje vietoje ir t. t. Vadinasi, iš viso yra $n(n-1)! = n!$ elementų, stovinčių savo vietose. Tačiau tų elementų skaičių galima rasti ir kitaip. Kėlinių, priklausančių r-tajai klasei (tokių, kuriuose lygiai r elementų yra savo vietose), skaičius lygus $D_{n,r}$. Kiekviename tokiame kėlinyje yra po r nepasislinkusių elementų.

Vadinasi, bendras nepasislinkusių elementų skaičius lygus $\sum_{r=o}^{n} r D_{n,r}$. Šitaip įrodėme tapatybę

$$n! = \sum_{r=0}^{n} r D_{n,r} = \sum_{r=0}^{n} r C_n^r D_{n-r}. \qquad (5')$$

Taikant priskirties ir išskirties formulę, galima išspręsti ir tokį uždavinį: *rasti skaičių kėlinių iš n elementų, kuriuose r nurodytųjų elementų nestovi savo vietose* (kiti elementai gali būti ir pasislinkę, ir likę savo vietose). Atsakymas bus toks

$$n! - C_r^1 (n-1)! + C_r^2 (n-2)! - \ldots + (-1)^r (n-r)!. \qquad (6)$$

Subfaktorialai*

Kai kurie autoriai skaičius D_n vadina *subfaktorialais*. Tie skaičiai turi daug savybių, panašių į paprastųjų faktorialų savybes. Pavyzdžiui, faktorialai tenkina lygybę

$$n! = (n-1)\left((n-1)! + (n-2)!\right). \qquad (7)$$

Tuo įsitikiname šitaip:

$$(n-1)\left((n-1)! + (n-2)!\right) = (n-1)(n-2)!\, n = n!.$$

Parodysime, kad tokią pat lygybę tenkina ir subfaktorialai, t. y. kad

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}). \qquad (8)$$

* Pirmą kartą skaitant, šį skyrelį galima praleisti.

Tam D_{n-1} ir D_{n-2} pakeisime jų dėstiniais pagal (3) formulę. Jei skaičiaus D_{n-1} išraiškoje atskirsime paskutinį dėmenį, tai gausime

$$(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})=(n-1)\Big((n-1)!+(n-2)!\Big)\cdot\Big(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-$$
$$-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\Big)+(-1)^{n-1}(n-1).$$

Tačiau iš (7) formulės matyti, kad

$$(n-1)\Big((n-1)!+(n-2)!\Big)=n!.$$

Be to,

$$(-1)^{n-1}(n-1)=n!\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Todėl

$$(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})=n!\Big(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\Big)=D_n.$$

(8) sąryšį galima išvesti, samprotaujant grynai kombinatoriškai, kaip darė Oileris. Imkime visus kėlinius, kuriuose nė vienas elementas nestovi savo vietoje. Pirmąją vietą tokiuose kėliniuose gali užimti bet kuris elementas, išskyrus pirmąjį. Kadangi likusių elementų skaičius lygus $n-1$, tai D_n kėlinių galima suskirstyti į $n-1$ klasių, atsižvelgiant į tai, koks elementas stovi pirmoje vietoje. Savaime aišku, kad visose klasėse elementų skaičius yra vienodas.

Apskaičiuokime, kiek kėlinių yra vienoje tų klasių, pavyzdžiui, toje, kurios kėliniuose pirmoje vietoje yra antrasis elementas. Ta klasė suskyla į dvi grupes: vienoje grupėje yra kėliniai, kurių antroje vietoje stovi pirmasis elementas, o antroje – kiti tos klasės kėliniai. Jei pirmasis elementas užėmė antrąją vietą (o antrasis, kaip pamename, – pirmąją vietą), tai likusius elementus galima bet kaip kaitalioti vietomis, tik reikia žiūrėti, kad nė vienas jų neužimtų savo vietos. Tą daryti yra D_{n-2} galimų būdų. Vadinasi, pirmajai tiriamosios klasės grupei priklauso D_{n-2} kėlinių.

Įrodysime, kad antrajai grupei priklauso D_{n-1} kėlinių. Jei kol kas antrąją vietą laikysime „priklausančia“ pirmajam elementui, tai išeis, kad tuose kėliniuose pirmasis, trečiasis, ..., n-tasis elementai nestovi savo vietose. Kadangi tų elementų skaičius lygus $n-1$, tai antroje grupėje yra D_{n-1} kėlinių. Dabar matome, kad tiriamojoje klasėje yra $D_{n-2}+D_{n-1}$ kėlinių. Kadangi visa kėlinių su paslinktais elementais aibė susideda iš $n-1$ klasių, tai toje aibėje yra $(n-1)\,[D_{n-2}+D_{n-1}]$ kėlinių. Vadinasi, (8) lygybė teisinga.

Iš (8) lygybės matyti, kad

$$D_n-nD_{n-1}=-\Big(D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}\Big).$$

Todėl, skaičių n padidinus (ar sumažinus) vienetu, pasikeičia tik reiškinio $D_n-n\ D_{n-1}$ ženklas. Tą sąryšį pritaikę keletą kartų, gauname lygybę

$$D_n-nD_{n-1}=(-1)^{n-2}(D_2-2D_1).$$

Kadangi $D_2=1$, o $D_1=0$, tai

$$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n. \tag{9}$$

Ši formulė primena faktorialų sąryšį $n!=n(n-1)!$.

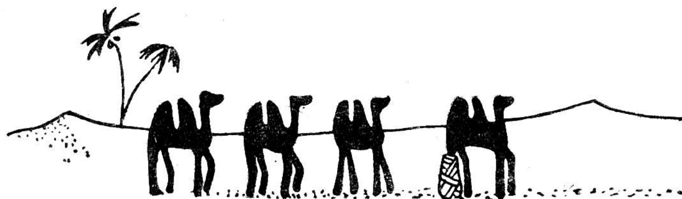
Apskaičiuosime subfaktorialų reikšmes, atitinkančias 12 pirmųjų natūrinių skaičių.

n	D_n	n	D_n	n	D_n	n	D_n
1	0	4	9	7	1854	10	1 334 961
2	1	5	44	8	14 833	11	14 684 570
3	2	6	265	9	133 496	12	176 214 841

Karavanas dykumoje

Per dykumą eina 9 kupranugarių vilkstinė. Kelionė tęsiasi daug dienų, ir visiems baisiai įgriso matyti prieš save vis tą patį kupranugarį. Keliais būdais galima sukeisti kupranugarius vietomis, kad prieš kiekvieną kupranugarį eitų kitas kupranugaris, negu anksčiau?

Tokių kėlinių tikrai yra. Pavyzdžiui, visus kupranugarius galima sustatyti atvirkščia tvarka, kad paskutinysis eitų pirmuoju ir t. t. Apskritai, kaip sako arabų patarlė ,,kai karavanas pasuka atgal, raišasis kupranugaris pasidaro pirmuoju“.



Spręsdami šį uždavinį, sunumeruokime kupranugarius pradinėje padėtyje skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, eidami nuo karavano galo į priekį. Vadinasi, paskutinis kupranugaris gauna numerį 1, priešpaskutinis – numerį 2 ir t. t. Mums reikia rasti visus skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 kėlinius, kuriuose nėra nė vienos poros (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9). Tam uždaviniui spręsti vėl taikysime priskirties ir išskirties formulę.

Pirmiausia apskaičiuosime, kiek yra tokių kėlinių, kuriuose yra pora (1, 2). Tuose kėliniuose porą (1, 2) galime laikyti vienu elementu. Tada elementų skaičius bus ne 9, o 8. Todėl kėlinių su pora (1, 2) skaičius lygus P_8. Tokį pat rezultatą gautume, pasirinkę bet kurią iš 8 porų.

Dabar išnagrinėsime kėlinius, kuriuose yra dvi nurodytos poros. Elementus, sudarančius tas poras, sujungiame taip: jei abiejose porose yra vienodų elementų (kaip, pavyzdžiui, porose (1, 2) ir (2, 3)), tai visus tris elementus laikome vienu elementu; priešingu atveju (turėdami, pavyzdžiui, poras (1, 2) ir (5, 6)) kiekviena pora laikoma vienu elementu. Po sujungimo abiem atvejais gausime 7 naujus elementus (kai kurie naujieji elementai – pradinių elementų poros arba trejetai); tuos elementus perstatinėti yra P_7 būdų. Be to, dviem poroms pasirinkti iš 8 porų turime C_8^2 būdų.

Visiškai panašiai galima įrodyti, kad skaičius kėlinių, kuriuose yra k nurodytųjų porų, lygus P_{9-k}. Be to, tas k porų pasirinkti yra C_8^k būdų. Pagal priskirties ir išskirties formulę įsitikiname, kad skaičius kėlinių, kuriuose nėra nė vienos nurodytųjų porų, lygus

$$P_9-C_8^1P_8+C_8^2P_7-C_8^3P_6+C_8^4P_5-C_8^5P_4+C_8^6P_3-C_8^7P_2+C_8^8P_1=$$
$$=8!\left[9-\frac{8}{1!}+\frac{7}{2!}-\frac{6}{3!}+\frac{5}{4!}-\frac{4}{5!}+\frac{3}{6!}-\frac{2}{7!}+\frac{1}{8!}\right]=148\,329.$$

Panašiai įrodoma, kad iš n skaičių 1, 2, 3, ..., n galima sudaryti

$$E_n=P_n-C_{n-1}^1P_{n-1}+C_{n-1}^2P_{n-2}-C_{n-1}^3P_{n-3}+\ldots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}P_1=$$
$$=(n-1)!\left(n-\frac{n-1}{1!}+\frac{n-2}{2!}-\frac{n-3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) \qquad (10)$$

kėlinių, kuriuose nėra nė vienos poros (1, 2), (2, 3), ..., $(n-1, n)$.

Gautąjį atsakymą išreikšime subfaktorialais. Todėl kiekvieną dėmenį, parašytą dešinėje lygybės pusėje, suskirstysime į du dėmenis:

$$\frac{(-1)^k(n-k)}{k!}=\frac{(-1)^k n}{k!}+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Tada gausime

$$E_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1!)}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)+(n-1)!\times$$
$$\times\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

abiejuose skliaustuose pridėjom po vieną—paskutinį—dėmenį; savaime aišku, kad tie nariai vienas kitą panaikina, nes atskliautę iš jų atitinkamai gauname $(-1)^n$ ir $(-1)^{n-1}$. Pirmasis reiškinys — ne kas kita, kaip D_n, o antrasis — ne kas kita, kaip D_{n-1}. Todėl

$$E_n=D_n+D_{n-1}. \qquad (11)$$

Vadinasi, skaičius kėlinių iš 1, 2, 3, ..., n, kuriuose nėra nė vienos poros (1, 2), (2, 3), ..., $(n-1, n)$, lygus D_n+D_{n-1}.

Visiškai panašiai įrodoma, kad n-elemenčių kėlinių, kuriuose nėra r nurodytųjų porų $(r\leqslant n-1)$, skaičius lygus

$$P_n-C_r^1P_{n-1}+C_r^2P_{n-2}-\ldots+(-1)^rC_r^rP_{n-r}. \qquad (12)$$

Kitokį atsakymą gauname, kai draudžiamųjų porų skaičius yra didesnis už $n-1$. Sakykime, pavyzdžiui, kad kėlinyje negali būti ne tik porų (1, 2), (2, 3), ..., $(n-1, n)$, bet ir poros $(n, 1)$. Samprotaudami visiškai taip pat, kaip anksčiau, įsitikinome, kad atsakymas apskaičiuojamas pagal formulę

$$F_n=P_n-C_n^1P_{n-1}+C_n^2P_{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}P_1=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)=nD_{n-1}. \qquad (13)$$

Iš tikrųjų šiuo atveju draudžiamųjų porų skaičius lygus n, o atvejo, kad kėlinyje būtų visos tos poros, nėra. Juk, kai kėlinyje yra, pavyzdžiui, po-

ros (1, 2), (2, 3), ..., $(n-1, n)$, pirmasis elementas yra 1, o paskutinis — n, todėl poros $(n, 1)$ kėlinyje nėra. Dėl to (13) formulėje paskutinis narys yra ne $(-1)^n C_n^n P_0 = (-1)^n$, bet $(-1)^{n-1} C_n^{n-1} P_1$.

Būtų įdomu gautąjį atsakymą $F_n = nD_{n-1}$ pagrįsti kombinatorikos metodais.

Sukimasis karuselėje

Karuselėje sukasi n vaikų. Jie nutarė pasikeisti vietomis taip, kad prieš kiekvieną vaiką būtų kitas vaikas, negu anksčiau. Keliais būdais jie gali tai padaryti?

Šis uždavinys panašus į karavano uždavinį, kurį sprendėme praeitame skyrelyje. Tik šį kartą draudžiamųjų porų skaičius lygus n: negali likti porų (1, 2), (2, 3), ..., $(n-1, n)$ ir $(n, 1)$. Be to, kėlinių, kuriuos galima sudaryti vieną iš kito, perkeliant vaikus ratu, nelaikysime skirtingais: kai karuselė pradės suktis, jų nebegalėsime atskirti. Todėl šį kartą iš k elementų galima sudaryti tik $P_{k-1} = (k-1)!$ iš esmės skirtingų kėlinių. Pagaliau šiame uždavinyje gali būti ir kėlinių, kuriuose yra n draudžiamųjų porų. Toks bus, pavyzdžiui, pradinis kėlinys. Atsižvelgdami į tas visas sąlygas, pagal priskirties ir išskirties formulę surandame pageidaujamų kėlinių skaičių

$$Q_n = P_{n-1} - C_n^1 P_{n-2} + C_n^2 P_{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} P_0 + (-1)^n C_n^n. \quad (14)$$

Lengva patikrinti, kad gautąjį reiškinį galima parašyti šitaip:

$$Q_n = D_{n-1} - D_{n-2} + D_{n-3} - \ldots + (-1)^{n-3} D_2. \quad (15)$$

Iš tikrųjų iš (14) formulės, remdamiesi lygybe $C_n^k - C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^k$, kai $n \geqslant 1$, gauname

$$Q_n + Q_{n-1} = P_{n-1} - C_{n-1}^1 P_{n-2} + C_{n-1}^2 P_{n-3} - \ldots + (-1)^n,$$

o pastarasis reiškinys lygus D_{n-1} (žr. p. 53). Vadinasi, $Q_n + Q_{n-1} = D_{n-1}$. Be to, iš (14) formulės matyti, kad $Q_2 = 0$. Todėl

$$\begin{aligned} Q_n + Q_{n-1} &= D_{n-1}, \\ -Q_{n-1} - Q_{n-2} &= -D_{n-2}, \\ Q_{n-2} + Q_{n-3} &= D_{n-3}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{n-3} Q_3 &= (-1)^{n-3} D_2. \end{aligned}$$

Sudėję tas lygybes, kaip tik gauname (15) sąryšį.

Eilė prie kasos

Prie kino kasos stovi $m+k$ žmonių eilė; m žmonių turi rublines, o k žmonių — pusrublius. Kino bilietas kainuoja 50 kap. Be to, pradedant pardavinėti bilietus, kasoje pinigų nėra. Keliais būdais žmonės su rublinėmis ir pusrubliais gali sustoti į eilę, kad eilė slinktų be kliūčių, t. y. kad niekam nereikėtų laukti grąžos?

Pavyzdžiui, kai $m=k=2$, yra tik du palankūs atvejai: prpr ir pprr (p reiškia pusrublį, o r — rublį). Tuo tarpu keturiais atvejais — rrpp,

rprp, rppr ir prrp – atsiranda kliūtis: pirmais trim atvejais jau pirmasis žiūrovas negali gauti grąžos, o paskutiniu atveju prie kasos turės gaišti trečiasis žiūrovas.

Kai m ir k reikšmės nėra didelės, uždavinį galima išspręsti, tiesiog ištiriant visus variantus. Kai m ir k – palyginti dideli skaičiai, tiesioginis variantų tyrimas nepadės. Juk iš m rublinių ir k pusrublių, kaip žinome, galima sudaryti

$$P(m, k) = \frac{(m+k)!}{m!\, k!}$$

skirtingų kėlinių. Pavyzdžiui, jei $m=k=20$, tai

$$P(20, 20) = \frac{40!}{20!\, 20!},$$

o tas skaičius didesnis už šimtą milijardų.

Išvesime formulę, išreiškiančią ieškomųjų variantų kiekį skaičiais m ir k. Vadinasi, mums reikia sužinoti, kiek yra kėlinių, sudarytų iš m raidžių r ir k raidžių p ir turinčių tokią savybę: su bet kokia j reikšme, $1 \leqslant j \leqslant m+k$, kėlinio pirmųjų j elementų grupėje raidžių p skaičius yra ne mažesnis už raidžių r skaičių (pusrublių turi būti ne mažiau, negu rublinių, nes priešingu atveju eilė turės sustoti).



Savaime aišku, kad uždavinys išsprendžiamas tik tada, kai $m \leqslant k$, nes priešingu atveju eilė tikrai sustos: pusrublių neužteks, ir kai kurie rublinių savininkai negalės gauti grąžos. Todėl galime tarti, kad $0 \leqslant m \leqslant k$. Kaip kai kuriuose kituose kombinatorikos uždaviniuose, taip ir šį kartą patogiau ieškoti „nepalankių“ variantų skaičiaus, t. y. tokių atvejų, kai eilutė sulaikoma. Jei tą skaičių rastume, tai, jį atėmę iš bendrojo m raidžių r ir k raidžių p kėlinių skaičiaus $P(m, k) = C_{m+k}^{m}$, gautume uždavinio atsakymą.

Pirmiausia įrodysime tokį teiginį: nepalankių kėlinių iš m raidžių r ir k raidžių p skaičius lygus $P(m-1, k+1) = C_{m+k}^{m-1}$, t.y. skaičiui visų galimų kėlinių iš $m-1$ raidžių r ir $k+1$ raidžių p. Tai įrodoma tokiu būdu. Imame

bet kokį nepalankų kėlinį, sudarytą iš m raidžių r ir k raidžių p. Sakykime, eilė sulaikoma ties kuria nors vieta. Tada prieš tą vietą yra vienodas skaičius raidžių p ir r (visi pusrubliai sunaudojami, duodant grąžą rublinių savininkams), o toje vietoje stovi raidė r: priešingu atveju eilė sėkmingai praeitų pro tą vietą. Vadinasi, vietos, ties kuria sulaikoma eilė, numeris bus $2s+1$, o prieš tą vietą stovi s raidžių p ir s raidžių r. Tiriamojo kėlinio pradžioje parašysime dar vieną raidę p (jei stovintieji eilėje imtų prieštarauti, pasakysime, kad tai daroma, norint palengvinti monetų keitimą). Tada gausime kėlinį iš m raidžių r ir $k+1$ raidžių p; be to, pirmoji to kėlinio raidė bus p, o iš pirmųjų $2s+2$ raidžių bus po lygiai raidžių r ir p (buvo s raidžių p ir $s+1$ raidžių r, todėl dabar raidžių r ir p bus po lygiai).

Po to pasielgsime taip, kad supyks rublinių savininkai ir nudžiugs pusrublių savininkai: pirmose $2s+2$ vietose stovinčių žmonių rublines pakeisime pusrubliais, o pusrublius – rubliais. Pavyzdžiui, jei eilė iš pradžių buvo

p p r p r p r r p r ***r*** p p r p p r,

tai ji bus sustabdyta raide ***r*** pažymėtoje vietoje. Po to, kai priekyje parašysime raidę p ir sukeisime monetas, gausime eilę

r r r p r p r p p r p ***p*** p p r p p r.

Kadangi pirmose $2s+2$ vietose buvo vienodas rublinių ir pusrublių skaičius, tai po sukeitimo bendras abiejų rūšių monetų kiekis nepasikeitė; todėl gausime m raidžių r ir $k+1$ raidžių p kėlinį, kuriame pirmoji raidė yra r. Vadinasi, kiekvienai nepalankiai m raidžių r ir k raidžių p sekai priskyrėme m raidžių r ir $k+1$ raidžių p seką, prasidedančią raide r.

Įrodysime, kad tokiu būdu galima sudaryti bet kurią m raidžių r ir $k+1$ raidžių p seką, prasidedančią raide r. Norėdami tuo įsitikinti, imkime bet kokią pastarojo tipo seką. Kadangi tarėme, kad $m \leqslant k$, tai kurioje nors vietoje raidžių p skaičius susilygina su raidžių r skaičiumi. Jei nuo sekos pradžios iki tos vietos imtinai kiekvieną raidę p pakeisime raide r, o kiekvieną raidę r – raide p ir nubrauksime pirmąją raidę p, tai kaip tik gausime nepalankų rublinių ir pusrublių pasiskirstymą eilėje. Eilė bus sulaikoma toje vietoje, kur pradinėje sekoje pirmą kartą raidžių p skaičius susilygina su raidžių r skaičiumi.

Tokiu būdu įsitikinome, kad *rublinių ir pusrublių nepalankių pasiskirstymų eilėje skaičius tiksliai lygus skaičiui visų kėlinių, sudaromų iš* m *raidžių* r *ir* $k+1$ *raidžių* p *ir prasidedančių raide* r. Kai nubrauksime pirmąją raidę r, gausime visus kėlinius iš $m-1$ raidžių r ir $k+1$ raidžių p. Tokių kėlinių skaičius lygus

$$P(m-1,\ k+1)=C_{m+k}^{m-1}.$$

Vadinasi, nepalankių kėlinių skaičius lygus C_{m+k}^{m-1}. Kadangi iš m raidžių r ir k raidžių p galima sudaryti iš viso C_{m+k}^{m} kėlinių, tai palankių kėlinių skaičius išreiškiamas formule

$$C_{m+k}^{m}-C_{m+k}^{m-1}=\frac{k-m+1}{k+1}C_{m+k}^{m}. \tag{16}$$

Jei $k=m$, t. y. jei eilėje yra tiek pat rublinių, kiek ir pusrublių, tai eilė praeis be kliūčių $\frac{1}{k+1}C_{2k}^{k}$ atvejais, o bus sulaikoma $\frac{k}{k+1}C_{2k}^{k}$ atvejais. Vadinasi, kuo didesnis k, tuo mažesnis palankių atvejų procentas.

Pateiktasis uždavinys visiškai išnagrinėtas. Toliau spręsime kitą uždavinį, labai artimą išnagrinėtajam, būtent, tarsime, kad kasininkas buvo apdairus ir *iš pradžių kasoje turėjo q pusrublių. Keliais atvejais eilė praeis be kliūčių, jei eilėje yra m žmonių, turinčių po rublinę, ir k žmonių, turinčių po pusrublį?*

Savaime aišku, kad tuo atveju, kai $m \leqslant q$, eilė tikrai praeis be kliūčių: pusrublių, kurie iš pat pradžių buvo kasoje, užteks duoti grąžą visiems rublinių savininkams. Jei $m>k+q$, tai eilė tikrai sustos: kasoje ir eilėje esančių pusrublių neužteks duoti grąžą visiems rublinių savininkams. Todėl mums pakanka išnagrinėti atvejį, kai

$$q<m \leqslant k+q.$$

Galima galvoti, jog q pusrublių atsirado kasoje dėl to, kad eilės pradžioje atsistojo q žmonių, turinčių pusrublius. Todėl uždavinį galima formuluoti šitaip:

Eilėje stovi $k+q$ žmonių su pusrubliais ir m žmonių su rublinėmis; be to, q pirmųjų vietų užima pusrublių savininkai. Keliais atvejais niekam nereikės gaišti, laukiant grąžos?

Tas uždavinys sprendžiamas tokiu pat būdu, kaip anksčiau išnagrinėtasis jo atskiras atvejis $q=0$. Apskaičiuosime, kiek bus nepalankių atvejų. Kiekvienu atveju turės gaišti pirmasis žmogus, kuris turi rublinę ir prieš kurį yra vienodas skaičius s pusrublių ir rublinių. Eilės pradžioje pastatykime dar vieną žmogų su pusrubliu ir pirmųjų $2s+2$ žmonių rublius pakeiskime pusrubliais, o pusrublius – rublinėmis. Gausime m rublių ir $k+q+1$ pusrublių kėlinį, kuriame $q+1$ pirmųjų vietų užima rubliai. Be to, kiekvieną pastarojo tipo kėlinį galima vieninteliu būdu sudaryti iš nepalankaus rublinių ir pusrublių dėstinio. Pašalinę $q+1$ pirmųjų rublių, gausime visus kėlinius iš $m-q-1$ rublinių ir $k+q+1$ pusrublių. Tokių kėlinių skaičius lygus $P(m-q-1,\ k+q+1)=C_{m+k}^{m-q-1}$.

Vadinasi, įrodėme, kad tiriamajame uždavinyje yra C_{m+k}^{m-q-1} nepalankių kėlinių. Kadangi visų kėlinių skaičius šį kartą lygus C_{m+k}^{k}, tai palankių kėlinių skaičius bus lygus

$$C_{m+k}^{k}-C_{m+k}^{m-q-1}. \tag{17}$$

Naudotuoju šiame skyrelyje metodu galima spręsti ir daugelį kitų uždavinių. Pavyzdžiui, tuo pačiu metodu lengva gauti tokį rezultatą:

Jei $m<k$, tai skaičius kėlinių, kurie yra sudaryti iš m raidžių r *ir k raidžių* p *ir kuriuose prieš kiekvieną raidę* (išskyrus pirmąją) *stovi daugiau raidžių* p, *negu raidžių* r, *lygus*

$$C_{m+k-1}^{m}-C_{m+k-1}^{m-1}=\frac{k-m}{k}C_{m+k-1}^{m}. \tag{18}$$

Samprotaujame visiškai panašiai, kaip ir anksčiau, tik pradžioje nepridedame raidės p.

(18) formulė teisinga, kai $m<k$. Jei $m=k$, tai kėlinių, turinčių minėtąją savybę, skaičius lygus $\frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1}$. Tuo galima įsitikinti, samprotaujant šitaip. Kiekvienas toks kėlinys turi prasidėti raide p ir baigtis raide r. Jei tas raides išbrauksime, tai liks kėlinys, sudarytas iš $k-1$ raidžių p ir $k-1$ raidžių r. Lengva susivokti, kad šitaip sustatyta eilė praeis be kliūčių. Atvirkščiai, iš kiekvieno $k-1$ raidžių p ir $k-1$ raidžių r kėlinio, pagal kurį sustojusi eilė praeina be kliūčių, pridėjus jo pradžioje raidę p, o gale – raidę r, gaunamas nurodytojo tipo kėlinys. Tačiau iš $k-1$ raidžių p ir $k-1$ raidžių r galima sudaryti $\frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1}$ kėlinių, pagal kuriuos sustatyta eilė praeina be kliūčių.

Dviejų gretų uždavinys

Kombinatorikoje dažnai tenka vieną uždavinį keisti kitu uždaviniu, iš pirmo žvilgsnio turinčiu mažai ką bendro su pirmuoju. Išnagrinėkime tokį uždavinį:

Keliais būdais galima surikiuoti $2n$ skirtingo ūgio žmonių į dvi gretas po n žmonių taip, kad kiekvienoje gretoje jie stovėtų pagal ūgį ir, be to, kiekvienas žmogus, stovįs pirmoje gretoje, būtų aukštesnis už žmogų, stovintį už jo antroje gretoje?

Įsitikinsime, kad, sprendžiant šį uždavinį, galima remtis jau išspręstu uždaviniu, nagrinėjančiu eilę prie kasos. Išrikiuokime žmones, kaip nurodyta, dviem gretomis ir visiems stovintiesiems pirmoje gretoje duokime po pusrublį, o stovintiems antroje gretoje — po rublį. Po to visus surikiuokime pagal ūgį į vieną eilę. Gausime eilę, kurioje yra n žmonių su pusrubliais ir n žmonių su rublinėmis. Iš uždavinio sąlygų matyti, kad ta eilė prie kasos nebus sutrukdyta. Iš tikrųjų, jei kas nors užima k-tąją vietą antroje gretoje, tai yra tik $k-1$ žmonių, aukštesnių už jį ir turinčių rublines, ir nemažiau kaip k žmonių, turinčių pusrublius ir aukštesnių už jį (tai stovintis prieš jį pirmoje gretoje ir visi stovintys pirmoje gretoje iš dešinės). Todėl, kai jis prieis prie kasos, galės gauti grąžą, nes kasoje bus mažų mažiausiai vienas pusrublis.

Sakykime, kad, atvirkščiai, yra kokia nors n žmonių su pusrublinėmis ir n žmonių su rublinėmis eilė, praeinanti be kliūčių. Nemažinant bendrumo, galima tarti, kad visi tie žmonės yra išsirikiavę pagal ūgį. Išrinkime dabar visus pusrublių savininkus ir pagal ūgį sustatykime pirmoje gretoje, o rublių savininkus – antroje gretoje. Siūlome skaitytojui įsitikinti, kad sudarytoji rikiuotė tenkina uždavinio sąlygas. Taigi galimų rikiuočių yra tiek pat, kiek ir palankių kėlinių iš n raidžių p ir n raidžių r, t. y. $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$.

Naujos derinių savybės*

Praeituose skyreliuose išvestos formulės padeda aptikti naujas derinių skaičiaus C_m^k savybes (žr. p. 38). Tuo tikslu visus „nepalankius" m raidžių r ir k raidžių p kėlinius skirstysime į klases. Matėme, kad taip sudaryta eilė sustos ties vieta su numeriu $2s+1$, jei prieš šią vietą yra s raidžių r ir s raidžių p, ir joje stovi raidė r. Iki tos vietos eilė eina be kliūčių. Visus nepalankius kėlinius su pirmąja kliūtimi $(2s+1)$-je vietoje priskirsime s-tajai klasei. Aišku, kad s gali įgyti reikšmes $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Apskaičiuokime, kiek kėlinių priklauso s-tajai klasei. Tuose kėliniuose $2s$ pirmųjų vietų gali užimti bet kokie palankūs kėliniai iš s raidžių r ir s raidžių p: juk iki $(2s+1)$-osios vietos eilė eina be kliūčių. Kaip anksčiau įsitikinome, tokių kėlinių skaičius lygus $\frac{1}{s+1} C_{2s}^s$. Toliau, $(2s+1)$-je vietoje, stovi raidė r, o po jos — bet kuris kėlinys iš likusiųjų $m-s-1$ raidžių r ir $k-s$ raidžių p. Tokių kėlinių skaičius lygus $P(m-s-1, k-s)=C_{m+k-2s-1}^{m-s-1}$. Vadinasi, pagal dauginimo taisyklę s-tajai klasei priklauso

$$\frac{1}{s+1} C_{2s}^s C_{m+k-2s-1}^{m-s-1}$$

nepalankių kėlinių. Kadangi visų nepalankiųjų kėlinių skaičius lygus C_{m+k}^{m-1}, o klasių skaičius lygus $m-1$, tai tuo atveju, kai $m \leqslant k$, gauname sąryšį

$$C_0^0 C_{m+k-1}^{m-1} + \frac{1}{2} C_2^1 C_{m+k-3}^{m-2} + \frac{1}{3} C_4^2 C_{m+k-5}^{m-3} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{m} C_{2m-2}^{m-1} C_{k-m+1}^0 = C_{m+k}^{m-1}. \qquad (19)$$

Šitą sąryšį, kaip atskirą atvejį, galima gauti iš bendresnės formulės

$$\sum_{s=p}^{m-1} (C_{2s-p}^s - C_{2s-p}^{s-p-1}) C_{m+k+p-2s-1}^{m-s-1} = C_{m+k}^{m-p-1}, \qquad (20)$$

kuri teisinga, kai $p < m \leqslant p+k$ (pirmajame dėmenyje skaičius C_p^{-1} laikomas lygiu nuliui). Pastaroji formulė išvedama panašiai, kaip ir (19), skirstant į klases nepalankius kėlinius, sudarytus iš m raidžių r ir $k+p$ raidžių p ir pradžioje turinčius p raidžių p (žr. p. 61).

Toliau sudarinėsime sąryšius, kurie gaunami, skirstant į klases palankius kėlinius, sudarytus iš k raidžių r ir k raidžių p. Tokių kėlinių skaičius lygus $\frac{1}{k+1} C_{2k}^k$. Praėjus visai eilei, kasoje neliks nė vieno pusrublio: jie bus sunaudoti grąžai. Tačiau kai kuriuose palankiuose kėliniuose ir anksčiau pasitaiko momentų, kai kasoje nebelieka nė vieno pusrublio; bet sekantis žiūrovas duoda pusrublį ir išgelbsti eilę nuo sustabdymo.

---

* **Pirmą kartą skaitant,** šį skyrelį galima praleisti.

Visus palankius kėlinius suskirstysime į klases, s-tajai klasei priskirdami tuos kėlinius, kuriems kasoje pirmą kartą nebelieka pusrublių $2s$-toje vietoje, $s=1, 2, \ldots, k$.

Sužinokime, kiek kėlinių priklauso s-tajai klasei. Kiekvienas tas kėlinys susideda iš dviejų dalių. $2s$ pirmųjų raidžių sudaro kėlinį iš s raidžių p ir s raidžių r, kuriame prieš kiekvieną raidę yra daugiau raidžių p, negu raidžių r (kitaip p ir r raidžių skaičius pirmą kartą išsilygintų ne $2s$-toje vietoje, o anksčiau). Matėme, kad tokių kėlinių yra $\frac{1}{s} C_{2s-2}^{s-1}$ (žr. p. 62). Pardavus $2s$ pirmųjų bilietų, kasoje pusrublių nelieka. Todėl, kad eilė eitų be kliūčių, $k-s$ paskutinių raidžių r ir $k-s$ raidžių p turi sudaryti palankų kėlinį. Tokių kėlinių skaičius lygus $\frac{1}{k-s+1} C_{2k-2s}^{k-s}$ (žr. p. 63). Pagal dauginimo taisyklę s-toje klasėje yra

$$\frac{1}{s(k-s+1)} C_{2s-2}^{s-1} C_{2k-2s}^{k-s}$$

kėlinių. Kadangi visų palankiųjų kėlinių skaičius lygus $\frac{1}{k+1} C_{2k}^{k}$, tai

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{k+1}{s(k+s-1)} C_{2s-2}^{s-1} C_{2k-2s}^{k-s} = C_{2k}^{k}. \tag{21}$$

Jei žymėtume:

$$\frac{1}{s+1} C_{2s}^{s} = T_s,$$

tai (21) lygybę galėtume parašyti šitaip:

$$T_0 T_{k-1} + T_1 T_{k-2} + \ldots + T_{k-1} T_0 = T_k. \tag{22}$$

Dar vieną skaičių C_n^m sąryšį gauname tokiu būdu. Pasirinksime kokį nors natūrinį skaičių l, $1 \leqslant l \leqslant m$, ir visų palankių kėlinių aibę suskirstysime į klases, kėlinį priskirdami s-tajai klasei, kai l pirmųjų jo vietų užima s raidžių r ir $l-s$ raidžių p. Kadangi raidžių p negali būti mažiau, negu raidžių r, tai s tenkina nelygybes $0 \leqslant 2s \leqslant l$.

Sužinokime, kiek kėlinių priklauso s-tajai klasei. Kiekvienas tos klasės kėlinys susideda iš dviejų dalių: pirmoji dalis sudaryta iš l pirmųjų raidžių, antroji iš $k+m-l$ paskutinių raidžių. Pirmojoje dalyje yra $l-s$ raidžių p ir s raidžių r. Kadangi visas kėlinys yra palankus, tai jo pirmoji dalis, sudaryta iš l raidžių, irgi yra palankus kėlinys. Iš $l-$s raidžių p ir s raidžių r galima sudaryti $\frac{l-2s+1}{l-s+1} C_l^s$ palankių kėlinių.

Kai praeis pirmoji kėlinio dalis, kasoje bus likę $l-2s$ pusrublių. Antroje kėlinio dalyje $k-l+s$ raidžių p ir $m-s$ raidžių r. Kiek kėlinių galima sudaryti, kad ta eilės dalis praeitų be kliūčių, sužinome iš (17) formulės, pateiktos 61 puslapyje, tik joje skaičių q reikia pakeisti skaičiumi $l-2s$, skaičių m — skaičiumi $m-s$, o skaičių k — skaičiumi $k-l+s$. Iš tos formulės matyti, kad sudaryti antrąją kėlinio dalį yra $C_{m+k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}$

būdų. Remdamiesi dauginimo taisykle, darome išvadą, kad s-tajai klasei priklauso

$$\frac{l-2s+1}{l-s+1}\, C_l^s \left(C_{m+k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}\right)$$

kėlinių. Kadangi visų palankiųjų kėlinių iš k raidžių p ir m raidžių r skaičius lygus $\frac{k-m+1}{k+1} C_{m+k}^m$, tai galima rašyti tapatybę*

$$\sum_{s=0}^{E\left[\frac{l}{2}\right]} \frac{l-2s+1}{l-s+1}\, C_l^s \left(C_{m-k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}\right) = \frac{k-m+1}{k+1}\, C_{m+k}^m. \qquad (23)$$

(Čia C_r^p, kai $p<0$, laikomas lygiu nuliui.) Skaitytojui siūlome išvesti daugiau tokių sąryšių, skirstant kėlinius vienaip ar kitaip į klases.

---

* Simboliu $\left[\frac{l}{2}\right]$ žymime sveikąją skaičiaus $\frac{l}{2}$ dalį.

IV SKYRIUS

SKIRSTINIŲ KOMBINATORIKA

Sprendžiant gretinių, kėlinių ir derinių uždavinius, iš turimųjų daiktų buvo sudarinėjamos įvairios kombinacijos ir skaičiuojama, kiek tokių kombinacijų galima sudaryti, laikantis vienokių ar kitokių apribojimų. Po kombinacijų sudarymo likusieji elementai mums beveik nerūpėjo. Uždaviniai, kuriuos spręsime toliau, yra kitokio pobūdžio. Tuose uždaviniuose elementai skirstomi į dvi arba daugiau grupių, ir reikalaujama rasti visus tokio skirstymo būdus.

Čia gali pasitaikyti įvairių atvejų. Kartais svarbiausia elementų tvarka grupėse. Pavyzdžiui, kai signalininkas iškabina signalines vėliavas keliuose laivo stiebuose, tai jam rūpi ne tik tai, ant kokio stiebo kabo ta ar kita vėliava, bet tai, kokia tvarka tos vėliavos sukabintos. Kai kada elementų tvarka grupėse neturi jokios reikšmės. Kai domino lošėjas iš krūvos ima kaulelius, jam nesvarbu, kokia tvarka paimti tie kauleliai, — svarbus tik galutinis rezultatas.

Uždaviniai vienas nuo kito skiriasi dar ir tuo, ar turi reikšmės pačių grupių tvarka. Domino lošėjai susėda kokia nors tvarka, todėl svarbu, kaip pasiskirstė kauleliai ir kam kokie kauleliai teko. Kai aš dėlioju fotonuotraukas į vienodus vokus, norėdamas jas pasiųsti draugui, man svarbu, kokia nuotrauka pateko į tą ar kitą voką, bet pačių vokų eilė visiškai nerūpi: pašte vis tiek juos sumaišys.

Svarbu ir tai, ar skiriame pačius elementus vieną nuo kito, ar ne, o taip pat, ar skiriame vieną nuo kitos tas grupes, į kurias skirstomi elementai. Pagaliau vienuose uždaviniuose kai kurios grupės gali būti tuščios (neturėti nė vieno elemento), o kituose tokių grupių negali būti. Atsižvelgę į tai, kas čia pasakyta, galime sugalvoti daug visokių *kombinatorikos uždavinių, nagrinėjančių skirstinius.*

Domino lošimas

Lošdami domino, 4 *žaidėjai dalijasi* 28 *kaulelius po lygiai. Keliais būdais jie gali tai padaryti?*

Padalyti kaulelius galima šitaip. Iš pradžių visus 28 kaulelius kokiu nors būdu sudedame į eilę. Paskui pirmasis lošėjas ima 7 pirmuosius kaulelius, antrasis — 7 tolesnius kaulelius, trečiasis — vėl 7 kaulelius, o ket-

virtasis pasiima likutį. Savaime aišku, kad šitokiu būdu galima sudaryti visus kaulelių skirstinius.

Kadangi skaičius visų kėlinių iš 28 elementų lygus 28!, tai gali atrodyti, kad visų dalijimo būdų skaičius lygus 28!. Tačiau taip galvoti klaidinga: juk pirmajam žaidėjui visiškai nesvarbu, ką jis paims pirma — ar kaulelį 6:6, ar kaulelį 3:4; jam rūpi tik galutinis rezultatas. Todėl bet koks 7 pirmųjų kaulelių sukeitimas vietomis nekeičia dalyko esmės. Nekeičia jo ir bet koks 7 antrųjų kaulelių perstatinėjimas, taip pat 7 trečiųjų ir 7 paskutiniųjų kaulelių perstatinėjimas. Iš dauginimo taisyklės išplaukia, kad $(7!)^4$ kaulelių kėlinių nekeičia dalijimo rezultato.

Vadinasi, 28! kaulelių kėlinių susiskirsto į grupes po $(7!)^4$ kėlinių kiekvienoje grupėje, ir visi vienos grupės kėliniai išreiškia tą patį kaulelių pasiskirstymą. Taigi kaulelių pasiskirstymo būdų skaičius lygus $\frac{28!}{(7!)^4}$. Šis skaičius apytiksliai lygus $4{,}7 \cdot 10^{14}$.

Tą patį rezultatą galima gauti ir kitaip. Pirmasis žaidėjas turi pasirinkti 7 kaulelius iš 28. Kadangi kaulelių tvarka neturi reikšmės, tai jis turi C_{28}^7 pasirinkimo variantų. Po to antrajam žaidėjui reikia pasirinkti 7 kaulelius iš likusiųjų kaulelių (jų yra 21). Tai padaryti yra C_{21}^7 variantų. Trečiasis žaidėjas renkasi kaulelius iš 14 likusiųjų, todėl jis turi C_{14}^7 pasirinkimo variantų. Pagaliau ketvirtajam žaidėjui lieka C_7^7 variantų, t. y. vienintelis variantas.

Taikydami dauginimo taisyklę, įsitikinome, kad visų skirstymo variantų skaičius lygus

$$C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_7^7 = \frac{28!}{21!\,7!} \cdot \frac{21!}{14!\,7!} \cdot \frac{14!}{7!\,7!} = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

Panašiai įrodoma, kad, lošiant preferansą, kai 32 kortos dalijamos trims žaidėjams po 10 kortų kiekvienam ir dvi kortos dedamos pirkiui, skirtingų dalijimo variantų skaičius lygus

$$\frac{32!}{10!\,10!\,10!\,2!} = 2\,753\,294\,408\,504\,640.$$

Galbūt skaitytojui įdomu, ar verta apskritai gaišti laiką, tiriant lošimą kortomis. Ta proga pasakysime, kad kaip tik azartinių lošimų tyrimas skatino kombinatorikos ir tikimybių teorijos vystymąsi. Tokie įžymūs matematikai, kaip Paskalis, Bernulis, Oileris, Čebyševas kombinatorikos ir tikimybių teorijos idėjas bei metodus tobulino, spręsdami uždavinius, susijusius su lošimu „herbas ar raštas“, lošimu kortomis ir kauleliais. Daugelis lošimų teorijos (matematikos šakos, plačiai taikomos ekonomikos ir karo moksluose) idėjų iš pradžių formavosi, tiriant paprasčiausius lošimo kortomis modelius.

Dėstymas į dėžes

Domino ir preferanso uždaviniai priklauso tai kombinatorikos uždavinių klasei, kurios uždaviniai tiria daiktų dėstymą į dėžes. Bendrasis šios klasės uždavinys yra šitoks:

Duota n skirtingų daiktų ir k dėžių. Į pirmąją dėžę reikia įdėti n_1 daiktų, į antrąją – n_2 daiktų, ..., į k-tąją – n_k daiktų. Be to, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Keliais būdais galima taip suskirstyti?

Domino uždavinyje dėžių vaidmenį atliko žaidėjai, o daiktų vaidmenį – kauleliai. Pakartoję tą patį samprotavimą, kaip ir spręsdami domino uždavinį, gausime bendrojo uždavinio atsakymą: skirtingų skirstinių skaičius lygus

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}. \qquad (1)$$

Šią formulę esame gavę anksčiau, spręsdami iš pirmo žvilgsnio visiškai nepanašų uždavinį:

Yra daiktai, sudarą k skirtingų tipų. Kiek skirtingų kėlinių galima sudaryti iš n_1 pirmojo tipo daiktų, n_2 antrojo tipo daiktų, ..., n_k k-tojo tipo daiktų?

Šio uždavinio atsakymą sužinojome iš formulės

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!},$$

kurioje $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ (žr. p. 29). Norėdami susieti tuodu uždavinius, sunumeruokime n vietų, kurias gali užimti turimieji daiktai. Kiekvieną kėlinį atitinka vietų numerių suskirstymas į k klasių. Į pirmąją klasę patenka numeriai tų vietų, kurias užima pirmojo tipo daiktai, į antrąją – numeriai tų vietų, kurias užima antrojo tipo daiktai, ir t. t. Šitaip sudaroma atitiktis tarp kėlinių su pasikartojimais ir vietų numerių skirstinių į „dėžes“. Iš to aišku, kodėl abiejų uždavinių sprendimo formulės yra vienodos.

Gėlių puokštė

Spręsdami elementų skirstymo į dėžes uždavinį, žinojome, kiek daiktų turi patekti į kiekvieną dėžę (pavyzdžiui, žinojome, kiek kaulelių turi gauti kiekvienas žaidėjas). Formuluojant daugelį skirstymo uždavinių, tie kiekiai nenurodomi.

Dvi mergaitės surinko 10 *ramunių,* 15 *rugiagėlių ir* 14 *neužmirštuolių. Keliais būdais jos gali pasidalyti tas gėles?*

Aišku, kad pasidalyti ramunes yra 11 būdų: pirmoji mergaitė gali neimti nė vienos ramunės, imti 1 ramunę, 2 ramunes, ..., 10 ramunių. Panašiai įsitikiname, kad pasidalyti rugiagėles yra 16 būdų, o neužmirštuoles – 15 būdų. Kadangi kiekvienos rūšies gėlių skirstymas nepriklauso nuo to, kaip skirstomos kitos rūšies gėlės, tai pagal dauginimo taisyklę gauname $11\cdot16\cdot15=2640$ skirstymo variantų.

Žinoma, kai kurie iš tų variantų labai neteisingi: viena mergaitė visiškai negauna gėlių. Todėl pareikalausime, kad kiekviena mergaitė turi gauti ne mažiau kaip 3 kiekvienos rūšies gėles. Tada pasidalyti ramunes galima tik penkiais būdais: pirmoji mergaitė gali imti 3, 4, 5, 6 arba 7 ramunes. Panašiai įsitikiname, kad rugiagėles galima pasidalyti 10 būdų, o neužmirštuoles – 9 būdais. Vadinasi, šiuo atveju visų skirstymo variantų skaičius lygus $5\cdot10\cdot9=450$.

Apskritai, kai turime n_1 vienos rūšies daiktų, n_2 — kitos rūšies daiktų ,..., n_k k-tosios rūšies daiktų, juos paskirstyti dviem žmonėms yra

$$(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_k+1) \tag{2}$$

būdų. Atskiru atveju, kai visi tie daiktai yra skirtingi, o jų skaičius lygus k, t. y. $n_1=n_2= \dots =n_k=1$, gauname 2^k skirstymo variantų.

Jei laikomasi papildomo apribojimo, kad kiekvienas dalyvaująs dalybose turi gauti nemažiau kaip s_1 pirmosios rūšies daiktų, s_2 antrosios rūšies daiktų, ..., s_k k-tosios rūšies daiktų, tai skirstymo variantų skaičius bus lygus sandaugai

$$(n_1-2s_1+1)(n_2-2s_2+1)\dots(n_k-2s_k+1). \tag{3}$$

Siūlome skaitytojui įrodyti tuos teiginius.

Uždavinys apie daliklių skaičių

Taikydami (2) formulę, kurios teisingumu siūlėme įsitikinti skaitytojui, galime išspręsti vieną skaičių teorijos uždavinį:

Reikia apskaičiuoti, kiek daliklių turi natūrinis skaičius N.

Tam skaičių N suskaidysime pirminiais dauginamaisiais: $N=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}$ (p_1, p_2, ..., p_k — skirtingi pirminiai skaičiai). Pavyzdžiui, $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$. Skaičių N reiškiant dviejų dauginamųjų N_1 ir N_k sandauga $N=N_1N_2$, pirminiai daugikliai skirstomi į dvi grupes. Jei skaičiuje N_1 daugiklis p_j kartojasi m_j kartų ($j=1, 2, \dots, k$), tai N lygus tokiai sandaugai:

$$N=(p_1^{m_1}\dots p_k^{m_k})(p_1^{n_1-m_1}\dots p_k^{n_k-m_k}).$$

Taigi skaičių N keičiant dviejų dauginamųjų sandauga, n_1 pirmos rūšies elementai, n_2 antros rūšies elementai, ..., n_k k-tos rūšies elementai suskirstomi į dvi grupes. Iš (2) formulės matyti, kad tai padaryti yra $(n_1+1)\dots(n_k+1)$ būdų. Vadinasi, natūrinis skaičius $N=p_1^{n_1}\dots p_k^{n_k}$ turi $(n_1+1)\dots(n_k+1)$ daliklių. Tų daliklių skaičius žymimas $\tau(N)$.

Obuolių rinkimas

Trys vaikai nuraškė nuo obels 40 *obuolių. Keliais būdais jie gali pasidalyti tuos obuolius, jei visi obuoliai laikomi vienodais* (t. y. mums rūpi, kiek obuolių gaus kiekvienas, bet nerūpi, kokie obuoliai jam teks)?

Spręsdami šį uždavinį, darysime šitaip: prie nuraškytųjų obuolių pridėsime 2 vienodas kriaušes ir visais galimais būdais 40 obuolių ir 2 kriaušes dėstysime į eilę. Pagal kėlinių su pasikartojimais formulę tokių dėstinių skaičius lygus

$$P(40,\ 2)=C_{42}^2=\frac{42!}{40!\,2!}=861.$$

Kiekvieną kėlinį atitinka obuolių skirstymo variantas: pirmajam vaikui duodame visus obuolius nuo pirmojo obuolio iki pirmosios kriaušės,

antrajam — visus obuolius, gulinčius tarp pirmosios ir antrosios kriaušės, o trečiajam — visus obuolius, gulinčius už antrosios kriaušės. Aišku, kad čia skirtingus kėlinius atitinka skirtingi skirstymo variantai. Vadinasi, visų skirstymo variantų skaičius lygus 861. Taip skirstant, gali atsitikti, kad vienas ar net du dalybų dalyviai negaus nieko. Pavyzdžiui, jei viena kriaušė pateks į kėlinio pradžią, tai obuolių negaus pirmasis vaikas, o jei į galą, — nieko negaus trečiasis. Kai abi kriaušės gulės greta, nieko negaus antrasis vaikas. Pagalvokite, kas atsitiks, kai abi kriaušės atsidurs kėlinio pradžioje arba pabaigoje.

Panašiai įrodoma, kad tuo atveju, kai k asmenų dalijasi n vienodų daiktų, galimų variantų skaičius lygus

$$P(n, k-1) = C_{n+k-1}^{n} = C_{n+k-1}^{k-1}. \qquad (4)$$

Dabar tarkime, kad, norėdami teisingiau paskirstyti, nusprendėme kiekvienam dalyviui duoti nemažiau kaip r daiktų. Tokiu atveju pirmiausia reikia kiekvienam duoti po r daiktų. Po to liks $n-kr$ daiktų, kuriuos jau galima skirstyti bet kaip. Tas skirstymas, kaip įsitikinome, turi $C_{n-kr+k-1}^{k-1} = C_{n-k(r-1)-1}^{k-1}$ variantų.

Atskiru atveju, kai kiekvienas iš k dalyvių turi gauti bent po vieną daiktą, dalybas atlikti yra C_{n-1}^{k-1} būdų.

Pastarąjį rezultatą galima gauti ir kitaip. Sustatykime n turimųjų daiktų į eilę. Tada tarp jų bus $n-1$ tarpų. Jei, pasirinkę $k-1$ tarpų, juose pastatysime pertvaras, tai visi daiktai bus suskirstyti į k netuščių grupių. Po to pirmoji grupė atiduodama pirmajam dalyviui, antroji — antrajam ir t. t. Kadangi, turint $n-1$ tarpų, pastatyti $k-1$ pertvarų yra C_{n-1}^{k-1} būdų, tai skirstymo variantų skaičius lygus C_{n-1}^{k-1}.

Grybavimas

Skirstant kelių skirtingų rūšių daiktus, reikia apskaičiuoti, keliais būdais galima suskirstyti kiekvienos rūšies daiktus, ir gautuosius skaičius sudauginti. Išspręskime, pavyzdžiui, tokį uždavinį:

Keliais būdais galima padalyti 10 *baravykų*, 15 *lepšių ir* 8 *raudonikius keturiems vaikams*?

Pritaikę praeito skyrelio rezultatus, sužinome atsakymą:

$$C_{13}^{3} C_{18}^{3} C_{11}^{3} = 38\,507\,040.$$

Jei kiekvienas vaikas turi gauti bent po vieną kiekvienos rūšies grybą, tai atsakymas bus kitoks:

$$C_{9}^{3} C_{14}^{3} C_{7}^{3} = 1\,070\,160.$$

Tuo atveju, kai k asmenų dalijasi n skirtingų daiktų be apribojimų, kiekvieną daiktą įteikti yra k būdų (galime jį atiduoti bet kuriam dalyvaujančiam dalybose). Tada sprendinių skaičius lygus k^n.

Pavyzdžiui, 5 žmonės 8 skirtingus pyragaičius gali pasidalyti $5^8 = 390\,625$ būdais.

Fotografijų siuntimas

Noriu pasiųsti savo draugui 8 skirtingas fotografijas. Keliais būdais galiu tai padaryti, turėdamas 5 skirtingus vokus?

Šis uždavinys panašus į uždavinį, kurį sprendėme praeito skyrelio pabaigoje. Todėl galima pagalvoti, kad atsakymas yra $5^8 = 390\,625$. Tačiau siųsti tuščių vokų negalima, ir dėl to atsiranda nauja sąlyga — nė vienas vokas neturi būti tuščias. Tenkindami šią sąlygą, taikysime priskirties ir išskirties formulę (atsakymas C_{n-k}^{k-1} irgi klaidingas, nes fotografijos skirtingos).

Pirmiausia pažiūrėkime, kiek yra fotografijų skirstymo variantų, kai į r nurodytųjų vokų fotografijų nededame (kiti vokai gali būti ir tušti, ir su fotografijomis). Tokiu atveju fotografijas dedame į $5-r$ vokų, o skirstinių skaičius, kaip anksčiau įrodėme, lygus $(5-r)^8$.

Kadangi iš penkių vokų pasirinkti r vokų turime C_5^r būdų, tai, remdamiesi priskirties ir išskirties formule, darome išvadą, kad skirstinių be tuščių vokų skaičius lygus

$$5^8 - C_5^1 \cdot 4^8 + C_5^2 \cdot 3^8 - C_5^3 \cdot 2^8 + C_5^4 \cdot 1^8 = 126\,000.$$

Visiškai panašiai įrodomas bendras teiginys: jei n skirtingų fotografijų dedame į k skirtingų vokų, nepalikdami nė vieno tuščio voko, tai galimų skirstymo variantų skaičius reiškiamas formule:

$$k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_k^2 (k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} \cdot 1^n. \qquad (5)$$

Skaitytojui siūlome pačiam išnagrinėti šitokį uždavinį:

Yra n_1 pirmojo tipo daiktų, n_2 antrojo tipo daiktų,... ir n_s s-tojo tipo daiktų. Keliais būdais gali juos pasidalyti k asmenų, jei kiekvienas asmuo turi gauti nors vieną daiktą?

Užrašysime šio uždavinio atsakymą:

$$C_{n_1+k-1}^{k-1} C_{n_2+k-2}^{k-1} \ldots C_{n_s+k-1}^{k-1} - C_k^1 C_{n_1+k-2}^{k-2} C_{n_2+k-2}^{k-2} \ldots C_{n_s+k-2}^{k-2} +$$

$$+ C_k^2 C_{n_1+k-3}^{k-3} C_{n_2+k-3}^{k-3} \ldots C_{n_s+k-3}^{k-3} - \ldots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1}. \qquad (6)$$

Pavyzdžiui, kai 4 vaikams dalijame 8 obuolius, 10 kriaušių ir 7 apelsinus, kiekvienam vaikui duodami bent po vieną vaisių, galimų skirstymo variantų skaičius lygus

$$C_{11}^3 C_{13}^3 C_{10}^3 - C_4^1 C_{10}^2 C_{12}^2 C_9^2 + C_4^2 C_9^1 C_{11}^1 C_8^1 - C_4^3 = 5\,239\,868.$$

Vėliavos stiebuose

Iki šiol mums nerūpėjo, kokia tvarka išdėstomi elementai kiekvienoje grupėje, susidariusioje po dalybų. Sprendžiant kai kuriuos uždavinius, į tą tvarką reikia atsižvelgti.

Yra n skirtingų signalinių vėliavų ir k stiebų, ant kurių jos kabinamos. Signalo reikšmė priklauso nuo to, kokia tvarka kabo vėliavos. Keliais būdais

galima iškabinti vėliavas, jei reikia panaudoti visas vėliavas, bet kai kurie stiebai gali būti tušti?

Kiekvieną vėliavų iškabinimo variantą galima sudaryti dviem etapais. Pirmame etape sudarome visus galimus n turimų vėliavų kėlinius. Tų kėlinių skaičius lygus $n!$. Paskui pasirenkame vieną iš būdų iškabinti n vienodų vėliavų ant k stiebų (primename, kad tų būdų skaičius lygus C_{n+k-1}^{k-1}). Tegul ant pirmojo stiebo pakabinama n_1 vėliavų, ant antrojo — n_2 vėliavų, ..., ant k-tojo — n_k vėliavų ir, be to, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Tada iš turimo vėliavų kėlinio imame n_1 pirmųjų vėliavų ir, nekeisdami jų eilės, kabiname ant pirmojo stiebo; n_2 tolesnių vėliavų kabiname ant antrojo stiebo ir t. t. Aišku, kad, išnaudojus visus n vėliavų kėlinius ir visus n vienodų vėliavų kabinimo ant k stiebų variantus, gaunami visi šio uždavinio sprendimo variantai. Remiantis dauginimo taisykle, vėliavų išdėstymo variantų skaičius lygus

$$n!\,C_{n+k-1}^{k-1}=\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}=A_{n+k-1}^{n}. \qquad (7)$$

Apskritai, *jei n skirtingų daiktų skirstome į k skirtingų dėžių, atsižvelgdami į daiktų išdėstymą kiekvienoje dėžėje, tai galimų skirstinių skaičius lygus A_{n+k-1}^{n}.*

Tą patį rezultatą galima gauti ir kitaip samprotaujant. Prie n skirstomųjų daiktų pridėkime $k-1$ vienodų rutulių ir sudarykime visus kėlinius iš $n+k-1$ turimų daiktų. Kiekvienas toks kėlinys apibrėžia vieną iš galimų skirstymo variantų, būtent, į pirmąją dėžę dedami visi daiktai, kurie yra kėlinyje iki pirmojo rutulio (jei pirmasis kėlinio elementas yra vienas iš pridėtųjų rutulių, tai pirmoji dėžė lieka tuščia). Paskui į antrąją dėžę dedami visi daiktai, patekę į kėlinį tarp pirmojo ir antrojo rutulio, ..., į k-tąją dėžę — daiktai, esą už $(k-1)$-mojo rutulio. Aišku, kad tokiu būdu gausime visus daiktų skirstinius, turinčius nurodytąsias savybes. Tačiau n skirtingų daiktų ir $k-1$ vienodų rutulių kėlinių skaičius lygus

$$P(\underbrace{1,\,1,\,\ldots,\,1}_{n\text{ kartų}},\,k-1)=\frac{(n+k-1)!}{1!\ldots 1!\,(k-1)!}=A_{n+k-1}^{n}.$$

Panašiai uždavinį sprendžiame ir tuo atveju, kai ant kiekvieno stiebo turi kaboti bent viena vėliava (arba kiekvienoje dėžėje turi būti bent vienas daiktas). Taikydami formulę, pateiktą 70 puslapyje, darome išvadą, kad tokiu atveju turime $n!\,C_{n-1}^{k-1}$ skirstymo variantų. Ir šį rezultatą galima gauti, pasirenkant atskyrimo taškus iš $n-1$ tarpų.

Visų signalų skaičius

Iki šiol reikalavome signalų perdavimui naudoti visas vėliavas. Tačiau gali būti ir tokių signalų, kuriuos perduodant naudojama tik dalis vėliavų, kabinamų ant visų arba ant kai kurių stiebų. Apskaičiuosime, *kiek iš viso signalų galima perduoti, turint n signalinių vėliavų, iškeliamų ant k stiebų.*

Suskirstykime tuos signalus į klases, atsižvelgdami į tai, kiek vėliavų naudojama signalui perduoti.

Iš (7) formulės matyti, kad, naudojant s nurodytųjų vėliavų, galima perduoti A^s_{s+k-1} signalų (stiebų skaičius lygus k). Kadangi pasirinkti s vėliavų iš n yra C^s_n būdų, tai s-tos klasės signalų skaičius lygus $C^s_n\, A^s_{s+k-1}$. Vadinasi, visų galimų signalų skaičius reiškiamas formule

$$C^0_n A^0_{k-1} + C^1_n A^1_k + C^2_n A^2_{k+1} + \ldots + C^n_n A^n_{n+k-1}. \qquad (8)$$

Pavyzdžiui, turėdami 6 skirtingas vėliavas ir kabindami jas ant 3 stiebų, galime perduoti

$$1 + C^1_6 A^1_3 + C^2_6 A^2_4 + C^3_6 A^3_5 + C^4_6 A^4_6 + C^5_6 A^5_7 + C^6_6 A^6_8 = 42\,079$$

skirtingus signalus.

Jei neleidžiama palikti tuščių stiebų, tai vietoj (8) formulės gauname

$$C^k_n C^{k-1}_{k-1} k! + C^{k+1}_n C^{k-1}_k (k+1)! + C^{k+2}_n C^{k-1}_{k+1} (k+2)! + \ldots + C^n_n C^{k-1}_{n-1} n!. \qquad (9)$$

Įvairios statistikos

Daiktų dėstymo į dėžes uždaviniai labai svarbūs statistinei fizikai. Tas mokslas tiria, kaip pasiskirsto fizikinės dalelės pagal savo savybes; pavyzdžiui, nagrinėjama, kokia tiriamųjų dujų molekulių dalis, esant tam tikrai temperatūrai, turi vienokį ar kitokį greitį. Šiuo atveju visų galimų būsenų aibė dalijama į didelį skaičių k mažų ląstelių (fazinių būsenų) ir kiekviena iš n tiriamųjų dalelių priskiriama vienai ląstelei.

Atsakymas į klausimą, kokiai statistikai yra pavaldžios vienos ar kitos dalelės, priklauso nuo dalelių rūšies. Klasikinėje statistinėje fizikoje, sukurtoje Maksvelo ir Bolcmano, visos dalelės laikomos skirtingomis. Tokiai statistikai pavaldžios, pavyzdžiui, dujų molekulės. Žinome, kad n skirtingų molekulių suskirstyti į k ląstelių yra k^n būdų. Jei, esant tam tikrai energijai, visų tų k^n variantų tikimybės yra vienodos, tai kalbama apie *Maksvelo—Bolcmano statistiką.*

Pasirodė, kad tokiai statistikai paklūsta ne visi fizikiniai objektai. Fotonai, atomų branduoliai ir atomai, kuriuose yra lyginis skaičius elementariųjų dalelių, pavaldūs statistikai, kurią sukūrė Einšteinas ir indų mokslininkas Bozė. *Bozė—Einšteino statistikoje* dalelės laikomos vienodomis, todėl kreipiamas dėmesys tik į tai, kiek dalelių patenka į tą ar kitą ląstelę, o ne į tai, kokios dalelės ten patenka. Tas uždavinys panašus į obuolių dalijimo uždavinį (žr. p. 70). Mes jau žinome, kad šiuo atveju gauname $C^{k-1}_{n+k-1} = C^n_{n+k-1}$ skirtingų skirstymo variantų. Bozė—Einšteino statistikoje visi tie variantai laikomi vienodai tikimais.

Vis dėlto daugeliui dalelių, pavyzdžiui, elektronams, protonams ir neutronams netinka nė Bozė – Einšteino statistika. Šiuo atveju kiekvienoje ląstelėje gali būti ne daugiau kaip viena dalelė, o skirtingi pasiskirstymai, tenkinantys nurodytąją sąlygą, turi vienodas tikimybes. Tada gali būti C^n_k skirtingų pasiskirstymų. Tokia statistika vadinama *Dirako—Fermio statistika.*

Skaičių skirstiniai

Iki šiol, spręsdami uždavinius, skirstomuosius daiktus dažniausiai laikėme skirtingais. Dabar pradėsime nagrinėti uždavinius, kuriuose skirstomieji daiktai yra visiškai vienodi. Tokiu atveju galima kalbėti ne apie daiktų dalijimą, o apie natūrinio skaičiaus skirstymą į dėmenis (aišku, kad dėmenys irgi turi būti natūriniai skaičiai).

Čia tenka spręsti daug įvairių uždavinių. Vienuose uždaviniuose atsižvelgiama į dėmenų eilę, kituose — neatsižvelgiama. Galima tirti tik skirstinius, kurių dėmenų skaičius yra lyginis arba nelyginis, skirstinius, kurių visi dėmenys yra skirtingi, arba bet kokius skirstinius ir t. t. Pagrindinis metodas skirstinių uždaviniams spręsti — jų keitimas mažesnių skaičių skirstymo uždaviniais arba skirstymo į mažiau dėmenų uždavinius.

Banderolės siuntimas

Ant siunčiamos banderolės reikia užklijuoti pašto ženklų už 18 *kap. Keliais būdais galima užklijuoti* 4, 6 *ir* 10 *kap. vertės pašto ženklus, jei du variantai, kurie skiriasi ženklų išdėstymo eile, laikomi skirtingais*?*

Skaičių būdų, kuriais galima užklijuoti 4, 6 ir 10 kap. vertės ženklus, kad bendroji tų ženklų kaina būtų lygi N, pažymėkime $f(N)$. Tada $f(N)$ tenkina sąryšį:

$$f(N)=f(N-4)+f(N-6)+f(N-10). \qquad (10)$$

Norėdami tuo įsitikinti, ištirkime kokį nors ženklų, kurių bendroji vertė lygi N, užklijavimo variantą, kai paskutinysis užklijuotas ženklas kainuoja 4 kap. Tada visi likę ženklai kainuoja $N-4$ kap. Atvirkščiai, jei prie bet kokios pašto ženklų kombinacijos, kainuojančios $N-4$ kap., prijungsime vieną 4 kap. vertės ženklą, tai gausime N kap. kainuojančią pašto ženklų kombinaciją. Be to, iš skirtingų $N-4$ kap. vertės kombinacijų susidarys skirtingos N kap. vertės kombinacijos. Vadinasi, skaičius tokių kombinacijų, kurių paskutinėje vietoje yra 4 kap. vertės pašto ženklas, lygus $f(N-4)$.

Panašiai įrodoma, kad skaičius kombinacijų, kurios baigiasi šešiakapeikiu ženklu, lygus $f(N-6)$ ir kad dešimties kapeikų ženklu baigiasi $f(N-10)$ kombinacijų. Kadangi bet kuri kombinacija baigiasi vieno kurio nors tipo ženklu, tai, remdamiesi sumavimo taisykle, gauname (10) sąryšį.

Iš (10) sąryšio matyti, kad vietoj pašto ženklų uždavinio su bendra N kap. suma reikia spręsti uždavinius su mažesnėmis sumomis. Uždaviniai su mažomis N reikšmėmis lengvai išsprendžiami tiesiogiai. Paprastu skaičiavimu įsitikiname, kad

$$f(0)=1,\ f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0,\ f(4)=1,$$

$$f(5)=0,\ f(6)=1,\ f(7)=0,\ f(8)=1,\ f(9)=0.$$

---

* Kiekvienos rūšies pašto ženklų turime pakankamai.

Lygybė $f(0)=1$ reiškia, kad 0 kap. sumą galima apmokėti vieninteliu būdu, visiškai neklijuojant ženklų. 1, 2, 3, 5, 7 ir 9 kap. sumos apskritai neįmanoma sudaryti iš 4, 6 ir 10 kap. vertės ženklų. Žinant $f(N)$ reikšmes, atitinkančias $N=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, lengva apskaičiuoti $f(10)$:

$$f(10)=f(6)+f(4)+f(0)=3.$$

Paskui gauname

$$f(11)=f(7)+f(5)+f(1)=0,$$

$$f(12)=f(8)+f(6)+f(2)=2$$

ir t. t. Pagaliau randame $f(18)$ reikšmę: $f(18)=8$. Vadinasi, pašto ženklus ant siunčiamosios banderolės galima suklijuoti aštuoniais būdais. Štai tie būdai:

10, 4, 4; 4, 10, 4; 4, 4, 10; 6, 4, 4, 4;

4, 6, 4, 4; 4, 4, 6, 4; 4, 4, 4, 6; 6, 6, 6.

Atkreipkime dėmesį, kad $f(N)$ reikšmes, atitinkančias $N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, galėjome sužinoti ir kitaip, netikrindami galimų kombinacijų. Mat su neigiamomis N reikšmėmis $f(N)=0$: neigiamos sumos neįmanoma apmokėti, klijuojant neneigiamą pašto ženklų kiekį. Be to, kaip buvo paaiškinta, $f(0)=1$. Todėl

$$f(1)=f(-3)+f(-5)+f(-9)=0.$$

Tokiu pat būdu apskaičiuojame reikšmes $f(2)=0$, $f(3)=0$. Kai $N=4$, gauname

$$f(4)=f(0)+f(-2)+f(-6)=1.$$

Bendrasis pašto ženklų uždavinys

Išnagrinėtasis uždavinys yra atskiras tokio bendresnio uždavinio atvejis.

Turime $n_1, n_2, \dots, n_k$ kap. vertės pašto ženklų. Keliais būdais galime jais apmokėti N kap. sumą, jei du būdai, kurie skiriasi eile, laikomi skirtingais?*

Šiuo atveju variantų skaičius $f(N)$ tenkina tokį sąryšį:

$$f(N)=f(N-n_1)+f(N-n_2)+\dots+f(N-n_k). \qquad (11)$$

Be to, $f(N)=0$, kai $N<0$, o $f(0)=1$. Iš (11) lygybės galima apskaičiuoti $f(N)$ su bet kokia N reikšme, paeiliui apskaičiavus $f(1), f(2), \dots, f(N-1)$.

Išnagrinėsime atskirą to uždavinio atvejį, kai $n_1=1$, $n_2=2$, ..., $n_k=k$. Gauname visus skaičiaus N skirstinius į dėmenis $1, 2, \dots, k$, kai

* Skaičiai $n_1, \dots, n_k$ skiriasi vienas nuo kito; ženklų kiekis neribotas.

skirstiniai, kurie skiriasi dėmenų tvarka, laikomi skirtingais. Tokių skirstinių skaičių žymėsime $\varphi(k; N)$*. Iš (11) lygybės matyti, kad

$$\varphi(k; N)=\varphi(k; N-1)+\varphi(k; N-2)+\ldots+\varphi(k; N-k). \tag{12}$$

Be to, čia $\varphi(k; 0)=1$, o kai $N<0$, $\varphi(k; N)=0$.

Skaičius $\varphi(k; N)$ randamas paprasčiau, pastebėjus, kad

$$\varphi(k; N-1)=\varphi(k; N-2)+\ldots+\varphi(k; N-k)+\varphi(k; N-k-1).$$

Todėl

$$\varphi(k; N)=2\varphi(k; N-1)-\varphi(k; N-k-1). \tag{13}$$

Savaime aišku, kad dėmenys negali būti didesni už N. Todėl $\varphi(N,N)$ reiškia, kiek iš viso yra skaičiaus N skirstinių į natūrinius dėmenis (įskaitant ir „skirstinį" $N=N$). Kai dėmenų skaičius lygus s, tai gauname C_{N-1}^{s-1} skirstinių (žr. p. 70). Todėl

$$\varphi(N, N)=C_{N-1}^{0}+C_{N-1}^{1}+\ldots+C_{N-1}^{N-1}=2^{N-1}.$$

Taigi įrodėme, kad natūrinį skaičių suskirstyti į dėmenis yra 2^{N-1} būdų. Primename, kad čia atsižvelgiama į dėmenų eilę.

Pavyzdžiui, skaičių 5 galima suskirstyti į dėmenis $2^{5-1}=16$ būdų:

$5=5$	$5=3+1+1$	$5=1+2+2$
$5=4+1$	$5=1+3+1$	$5=2+1+1+1$
$5=1+4$	$5=1+1+3$	$5=1+2+1+1$
$5=2+3$	$5=2+2+1$	$5=1+1+2+1$
$5=3+2$	$5=2+1+2$	$5=1+1+1+2$
		$5=1+1+1+1+1$

Informacijos teorijos uždaviniai

Uždavinį, panašų į ką tik išspręstąjį, tenka nagrinėti informacijos teorijoje. Sakykime, kad pranešimas siunčiamas kelių tipų signalais. Pirmojo tipo signalo perdavimo trukmė lygi t_1 laiko vienetų, antrojo tipo — t_2 laiko vienetų, ..., k-tojo tipo — t_k laiko vienetų. *Kiek skirtingų pranešimų galima perduoti tais signalais per T laiko vienetų*? Čia skaičiuojami tik „maksimalūs" pranešimai, t y. tokie pranešimai, prie kurių negalima prijungti nė vieno signalo, nepereikvojant perdavimui skirto laiko.

Pranešimų, kurių siuntimo trukmė lygi T, skaičių žymėsime $f(T)$. Samprotaudami visiškai panašiai, kaip pašto ženklų uždavinyje, įsitikiname, kad $f(T)$ tenkina lygybę

$$f(T)=f(T-t_1)+\ldots+f(T-t_k). \tag{14}$$

Šiuo atveju irgi $f(T)=0$, kai $T<0$, o $f(0)=1$.

---

* Čia ir toliau žymime taip: pirmoje vietoje nurodome dėmenų skaičių, antroje — skirstomąjį skaičių, paskutinėje — dėmenų apribojimus.

Abituriento problema

Abiturientas, stojantis į aukštąją mokyklą, turi išlaikyti 4 egzaminus. Jis mano, kad, norint įstoti, pakanka surinkti 17 balų. Keliais būdais jis gali išlaikyti egzaminus, kad jį priimtų į aukštąją mokyklą?

Šitas uždavinys panašus į pašto ženklų uždavinį, tik skiriasi nuo jo tuo, kad šį kartą nurodyta, keliais „pašto ženklais“ turi būti „apmokėta 17 balų suma“. Už kiekvieną sėkmingai išlaikytą egzaminą stojantysis gauna 3, 4 arba 5 balus. Skaičių būdų, kuriais galima surinkti N balų iš k egzaminų, žymėsime $F(k; N)$. Tada turėsime lygybę

$$F(k; N)=F(k-1; N-3)+F(k-1; N-4)+F(k-1; N-5),$$

kuri išvedama visiškai panašiai, kaip (11) lygybė, pateikta 75 puslapyje.

Iš šios lygybės gauname

$$F(4; 17)=F(3; 14)+F(3; 13)+F(3; 12)=F(2; 11)+2F(2; 10)+$$
$$+3F(2; 9)+2F(2; 8)+F(2; 7)=2+3F(2; 9)+2F(2; 8)+F(2; 7),$$

nes iš dviejų egzaminų surinkti 11 balų neįmanoma, o surinkti 10 balų galima tik vienu būdu — gavus du penketukus.

Tęsdami skaičiavimą toliau, gauname

$$F(4; 17)=2+3F(1; 6)+5F(1; 5)+6F(1; 4)+3F(1; 3)+F(1; 2).$$

Kadangi $F(1; 6)=F(1; 2)=0$*, o $F(1; 5)=F(1; 4)=F(1; 3)=1$, tai $F(4; 17)=16$. Panašiai įsitikiname, kad

$$F(4; 18)=10, \quad F(4; 19)=4 \text{ ir } F(4; 20)=1.$$

Iš viso gauname $16+10+4+1=31$ būdų sėkmingai išlaikyti stojamuosius egzaminus.

Tą patį rezultatą galima gauti ir kitaip. Lengva patikrinti, kad 17 balų galima surinkti dviem iš esmės skirtingais būdais: arba gaunant 2 penketukus, 1 ketvertuką ir 1 trejetuką, arba gaunant 1 penketuką ir 3 ketvertukus. Tie pažymiai gali bet kaip pasiskirstyti pagal laikomuosius dalykus. Kadangi

$$P(2, 1, 1)+P(1, 3)=\frac{4!}{2!\,1!\,1!}+\frac{4!}{3!\,1!}=16,$$

tai surinkti 17 balų yra 16 būdų. Panašiai apskaičiuojama, kiek yra būdų surinkti 18, 19 ir 20 balų.

Apskritai, jei $F(m; N)$ — skaičius būdų suskirstyti skaičių N į m dėmenų, kurių kiekvienas lygus vienam iš skaičių $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tai $F(m; N)$ tenkina lygybę

$$F(m; N)=F(m-1; N-n_1)+\ldots+F(m-1; N-n_k). \qquad (15)$$

Ši lygybė išvedama visiškai panašiai, kaip ir (11) lygybė. Skaitytojui siūlome padaryti tai pačiam.

---

* Iš vieno egzamino gauti šešis balus neįmanoma, o su dvejetuku į aukštąją mokyklą nepriima.

Atskiru atveju, kai $n_1=1$, $n_2=2$, ..., $n_k=k$, gauname skaičiaus N skirstinius į m dėmenų, kurių kiekvienas lygus vienam iš skaičių 1, 2, ..., k. Tų skirstinių skaičių žymėsime $F(m; N; k)$. Skaičius $F(m; N; k)$ tenkina lygybę

$$F(m;\ N;\ k)=F(m-1;\ N-1;\ k)+F(m-1;\ N-2;\ k)+\ldots+$$
$$+F(m-1;\ N-k;\ k). \tag{16}$$

Kaip 76 puslapyje, taip ir čia iš (16) lygybės išplaukia, kad

$$F(m;\ N;\ k)=F(m;\ N-1;\ k)+F(m-1;\ N-1;\ k)-$$
$$-F(m-1;\ N-k-1;\ k). \tag{17}$$

Toliau spręsime skirstymo uždavinius, kuriuose skirstiniai, kai jie skiriasi tiktai dėmenų eile, laikomi vienodais.

Pirkinio apmokėjimas

Piniginėje yra po vieną 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 *ir* 50 *kap. vertės monetą. Kiek yra būdų sumokėti tomis monetomis už* 73 *kap. pirkinį?*

Šitame uždavinyje monetų eilė neturi reikšmės: svarbu tik tai, kokios monetos pasirenkamos mokėti už pirkinį. Simboliu

$$F(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m;\ N)$$

susitarsime žymėti skaičių būdų, kuriais galima sumokėti N kap. turimomis $n_1, n_2, \ldots, n_m$ kap. monetomis, duodant ne daugiau kaip po vieną kiekvienos rūšies monetą ($n_1, n_2, \ldots, n_m$ — skirtingi natūriniai skaičiai). Visus mokėjimo būdus suskirstysime į dvi klases, atsižvelgdami į tai, ar mokama n_m kap. vertės moneta, ar ne. Jeigu taip, tai likusią $N-n_m$ kap. sumą reikia sumokėti $n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}$ kap. vertės monetomis. Tai padaryti turime $F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N-n_m)$ būdų. Jei n_m kap. moneta nevartojama, tai visą N kap. sumą reikia sumokėti $n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}$ kap. vertės monetomis. Tai padaryti yra $F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N)$ būdų.

Iš to, kas pasakyta, matyti, kad

$$F(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m;\ N)=F(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_{m-1};\ N-n_m)+$$
$$+F(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_{m-1};\ N). \tag{18}$$

Šis sąryšis įgalina m monetų uždavinį pakeisti $m-1$ monetų uždaviniu. Pakartoję tą patį samprotavimą, gausime $m-2$ monetų uždavinį ir t. t. Taip tęsdami, galų gale gausime arba nulinės sumos mokėjimo uždavinį, arba vienos monetos uždavinį. Abu uždaviniai išsprendžiami vienareikšmiškai. Be to, skaičiuojant daug dėmenų galima praleisti. Juk jei $n_1+n_2+\ldots+n_m<N$, tai $F(n_1, n_2, \ldots, n_m; N)=0$, nes monetų nepakanka pirkiniui apmokėti. Kita vertus, kai $n_m>N$, (18) lygybė keičiama paprastesne, būtent,

$$F(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m;\ N)=F(n_1;\ n_2,\ \ldots,\ n_{m-1};\ N),$$

nes n_m kap. monetos panaudoti mokėjimui neįmanoma.

Pritaikysime aprašytąjį metodą pradžioje pateiktajam uždaviniui spręsti. Pagal (18) lygybę

$$F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 50;\ 73)=F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20;\ 23)+$$
$$+F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20;\ 73)=F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20;\ 23),$$

nes $1+2+3+5+10+15+20<73$, todėl $F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73)=$ $=0$. Toliau rašome šitaip:

$$F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20;\ 23)=F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15;\ 3)+$$
$$+F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15;\ 23).$$

Tačiau $F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3)=F(1, 2, 3; 3)=F(1, 2; 0)+F(1, 2; 3)=$ $=1+F(1; 3)+F(1; 1)=2$.

Apskaičiuojame antrąjį dėmenį:

$$F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15;\ 23)=F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10;\ 8)+$$
$$+F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10;\ 23)=F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10;\ 8),$$

nes $1+2+3+5+10<23$. Tačiau $F(1, 2, 3, 5; 8)=F(1, 2, 3; 3)=2$.

Pagaliau sužinojome, kad $F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73)=4$. Vadinasi, už pirkinį galima sumokėti keturiais būdais, duodant arba 50, 20 ir 3 kap. monetas, arba 50, 20, 2 ir 1 kap. monetas, arba 50, 15, 5 ir 3 kap. monetas, arba 50, 15, 5, 2 ir 1 kap. monetas.

Saldainių pirkimas

Krautuvėje pardavinėjami kelių rūšių saldainiai: 3 rūšių saldainiai po 2 kap. už vieną saldainį ir 2 rūšių saldainiai po 3 kap. už vieną. Keliais būdais galima nusipirkti saldainių už 8 kap., jei perkama ne daugiau kaip po vieną kiekvienos rūšies saldainį?

Uždavinys sprendžiamas šitaip:

$$F(2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3;\ 8)=F(2,\ 2,\ 2,\ 3;\ 5)+F(2,\ 2,\ 2,\ 3;\ 8)=$$
$$=F(2,\ 2,\ 2;\ 2)+2F(2,\ 2,\ 2;\ 5)+F(2,\ 2,\ 2;\ 8)=F(2,\ 2,\ 2;\ 2)=$$
$$=F(2,\ 2;\ 0)+F(2,\ 2;\ 2)=1+F(2;\ 0)+F(2;\ 2)=3.$$

Vadinasi, pirkinį galima sudaryti trim būdais: perkami du saldainiai po 3 kapeikas (po vieną abiejų rūšių saldainį) ir vienas saldainis už 2 kapeikas (kuris nors iš 3 turimų rūšių).

Atrodytų, kad tiek pat sprendinių turi ir kitas uždavinys:

Piniginėje yra 3 monetos po 2 kap. ir 2 monetos po 3 kap. Kiek yra būdų sumokėti tomis monetomis 8 kap.?

Būdų skaičius priklauso nuo to, kokios monetos yra piniginėje. Jei dvikapeikes monetas, taip pat ir trikapeikes monetas, laikytume atskiriamomis viena nuo kitos, tai pastarasis uždavinys sutaptų su išspręstuo-

ju uždaviniu, ir sumokėti 8 kap. galėtume trim būdais. Bet jei visos dvikapeikės monetos yra vienodos, tai lieka tik vienas mokėjimo būdas: 2 monetos po 3 kap. ir 1 dvikapeikė moneta.

Vadinasi, pirkinio apmokėjimo uždavinių sprendimas priklauso nuo to, ar vienodos vertės monetas laikome skirtingomis, ar ne. Išnagrinėtąjį metodą taikome, kai visos monetos laikomos skirtingomis, nežiūrint ar jų vertės vienodos, ar ne. Dabar parodysime, kaip reikia spręsti uždavinį, kai vienodos vertės monetos laikomos neatskiriamomis.

Piniginėje yra 10 *monetų po* 2 *kap. ir* 5 *monetos po* 3 *kap. Kiek yra būdų sumokėti tomis monetomis* 22 *kap. sumą, jei vienodos vertės monetų neįmanoma atskirti vieną nuo kitos*?

Šio uždavinio sprendinių skaičių pažymėkime $\Phi(10\cdot 2;\ 5\cdot 3;\ 22)$ (sandauga $10\cdot 2$ reiškia, kad turime 10 monetų po 2 kap., o $5\cdot 3$ — kad turime 5 monetas po 3 kap.). Visus uždavinio sprendinius suskirstykime į klases, atsižvelgdami į tai, kiek sunaudojama trikapeikių monetų. Jei, pavyzdžiui, duodame 2 trikapeikes monetas, tai likusią 16 kap. sumą reikia sumokėti dvikapeikėmis monetomis, o jei duodame visas 5 monetas, tai lieka sumokėti tik 7 kap. Jei trikapeikės monetos visai nenaudojamos mokėjimui, tai visą 22 kap. sumą reikia sumokėti dvikapeikėmis monetomis. Vadinasi, galima rašyti lygybę

$$\Phi(10\cdot 2,\ 5\cdot 3;\ 22)=\Phi(10\cdot 2;\ 22)+\Phi(10\cdot 2;\ 19)+\Phi(10\cdot 2;\ 16)+$$
$$+\Phi(10\cdot 2;\ 13)+\Phi(10\cdot 2;\ 10)+\Phi(10\cdot 2;\ 7). \qquad (19)$$

Toliau tęsti nebereikia, nes turime tik 5 trikapeikes monetas. Savaime aišku, kad dešimties dvikapeikių monetų neužtenka, norint sumokėti 22 kap. Todėl $\Phi(10\cdot 2;\ 22)=0$. Be to, aišku, kad dvikapeikėmis monetomis neįmanoma sumokėti nelyginę sumą, o lyginę galima sumokėti vieninteliu būdu. Todėl iš (19) gauname

$$\Phi(10\cdot 2,\ 5\cdot 3;\ 22)=2.$$

Vadinasi, yra tik du mokėjimo būdai: $22=8\cdot 2+2\cdot 3=5\cdot 2+4\cdot 3$.

Kaip iškeisti griviną?

Skaitytojui turbūt kasdien po keletą kartų tenka keisti grivinas*: norint važiuoti metro, reikia penkiakapeikių monetų; pasikalbėjimui telefonu automatu reikia dvikapeikių monetų; norint išgerti stiklinę gazuoto vandens su sirupu, reikia trikapeikių monetų. Dėl to kyla klausimas:

Keliais būdais galima iškeisti griviną 1, 2, 3 ir 5 *kap. monetomis*?

Šitas uždavinys panašus į praeito skyrelio pabaigoje spręstą uždavinį. Tiktai šį kartą vienos rūšies monetų skaičius neribojamas. Todėl sprendinių

* Grivina — dešimties kapeikų moneta. *Vertėjas*

skaičių žymėsime taip: $\Phi(1, 2, 3, 5; 10)$. Samprotaudami visiškai taip pat, kaip ir praeitame skyrelyje, gauname sąryšį

$$\Phi(1, 2, 3, 5; 10) = \Phi(1, 2, 3; 10) + \Phi(1, 2, 3; 5) + \\ + \Phi(1, 2, 3; 0) \quad (20)$$

(visi grivinos keitimo variantai suskirstyti į klases pagal penkiakapeikių monetų skaičių). Aišku, kad $\Phi(1, 2, 3; 0) = 1$ — sumokėti 0 kap. galima tik vienu būdu.

Norint apskaičiuoti $\Phi(1, 2, 3; 5)$, reikia visus 5 kap. monetos keitimo 1, 2 ir 3 kap. vertės monetomis būdus suskirstyti į klases, atsižvelgiant į tai, kiek imama trikapeikių monetų. Gauname

$$\Phi(1, 2, 3; 5) = \Phi(1, 2; 5) + \Phi(1, 2; 2)$$

(pirmasis dėmuo atitinka atvejį, kai trikapeikių monetų neimama, antrasis — kai imama viena tokia moneta).

Skaičiuodami toliau, gauname

$$\Phi(1, 2, 3; 5) = \Phi(1; 5) + \Phi(1; 3) + \Phi(1; 1) + \Phi(1; 2) + \Phi(1; 0).$$

Visi šie dėmenys lygūs 1, nes bet kokią sumą vienakapeikėmis monetomis galima sumokėti vieninteliu būdu. Taigi, $\Phi(1, 2, 3; 5) = 5$. Panašiai įsitikiname, kad $\Phi(1, 2, 3; 10) = 14$. Iš viso gauname $14 + 5 + 1 = 20$ grivinos iškeitimo variantų.

Vietoj (20) lygybės galėjome iš pradžių parašyti lygybę

$$\Phi(1, 2, 3, 5; 10) = \Phi(1, 2, 3; 10) + \Phi(1, 2, 3, 5; 5).$$

Ji parodo, kad grivinos keitimo variantai gali būti skirstomi į tuos, kuriuose nėra nė vienos penkiakapeikės monetos, ir į tuos, kuriuose yra bent viena penkiakapeikė moneta.

Apskritai, jei N kap. sumą reikia apmokėti monetomis, turinčiomis $n_1, \ldots, n_k$ kap. vertę, tai

$$\Phi(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k; N) = \Phi(n_1, \ldots, n_{k-1}; N) + \\ + \Phi(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k; N - n_k). \quad (21)$$

Iš šios lygybės matyti, kad arba nenaudojama nė viena n_k kap. moneta (tada visą sumą N reikia apmokėti $n_1, \ldots, n_{k-1}$ kap. monetomis), arba bet viena n_k kap. moneta panaudojama (tada likusią $N - n_k$ kap. sumą reikia apmokėti $n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k$ kap. monetomis). Kai monetos negali kartotis (kaip 78 puslapyje), vietoj (21) lygybės reikia taikyti jau anksčiau pasitaikiusią lygybę (žr. p. 78)

$$F(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k; N) = F(n_1, \ldots, n_{k-1}; N) + \\ + F(n_1, \ldots, n_{k-1}; N - n_k). \quad (22)$$

Skaičių skirstymas dėmenimis

Nagrinėsime atskirą monetos keitimo uždavinio atvejį, kai keitimui galima vartoti bet kokias monetas nuo 1 iki n kap. Kitaip sakant, spręsime tokį uždavinį:

Keliais būdais galima suskirstyti dėmenimis skaičių N, jei kiekvienas dėmuo turi būti lygus vienam iš skaičių $1, 2, \ldots, n$ (į dėmenų eilę nekreipiama dėmesio)?

Tokių skirstymo variantų skaičių žymėsime Π_N^n*. Bus teisinga tokia lygybė:

$$\Pi_N^n = \Pi_N^{n-1} + \Pi_{N-n}^n. \qquad (23)$$

Iš tikrųjų, jei nė vienas dėmuo nelygus n, tai N skirstomas dėmenimis $1, 2, \ldots, n-1$, o tokių skirstinių skaičius lygus Π_N^{n-1}. Jei bent vienas dėmuo lygus n, tai skaičius $N-n$ skirstomas dėmenimis $1, 2, \ldots, n$, o tokių skirstinių skaičius lygus Π_{N-n}^n.

Dabar pareikalausime, kad *visi dėmenys būtų skirtingi*. Sprendinių skaičių žymėsime Φ_N^n (be to, tarsime, kad $\Phi_0^n = 1$). Skaitytojui siūlome įrodyti, kad Φ_N^n tenkina sąryšį

$$\Phi_N^n = \Phi_N^{n-1} + \Phi_{N-n}^{n-1} \qquad (24)$$

(skaičiaus n negalima imti dėmeniu antrą kartą).

Lengva pastebėti, kad $\Phi_1^1 = 1$, o kai $N > 1$, $\Phi_N^1 = 0$. Todėl, taikydami (24) formulę, galime paeiliui apskaičiuoti Φ_N^n reikšmes, atitinkančias bet kokius n ir N. Skaičiuojant Π_N^n, patogiau taikyti ne (23) lygybę, bet lygybę

$$\Pi_N^n = \Pi_N^{n-1} + \Pi_{N-n}^{n-1} + \Pi_{N-2n}^{n-1} + \ldots, \qquad (25)$$

kurią gauname, paeiliui taikydami (23) lygybę. Paskui pakanka pastebėti, kad $\Pi_N^1 = 1$ (bet kurį natūrinį skaičių galima išreikšti vienetų suma vieninteliu būdu). Taikydami (25) lygybę, paeiliui apskaičiuojame Π_N^2 su visais N, paskui Π_N^3 ir t. t.

Pastebėsime, kad skaičių N suskirstyti dėmenimis yra iš viso Π_N^N būdų: didesnių už N dėmenų skirstinyje negali būti. Panašiai skaičių N suskirstyti skirtingais dėmenimis yra iš viso Φ_N^N būdų.

Diagramos

Iš pradžių skaičių skirstymo teoremos buvo įrodinėjamos labai sudėtingais metodais. Kaip ir daugelyje kitų matematikos klausimų, taip ir kombinatorikoje teoremų įrodymus padarė lengvesniais ir vaizdesniais geometriški samprotavimai.

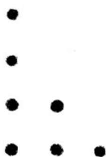
Bet kurį skaičiaus N skirstinį dėmenimis galima pavaizduoti diagrama. Kiekvienoje diagramos eilutėje yra tiek taškų, kiek vienetų turi

* Π_0^n reikšmę laikome lygia 1.

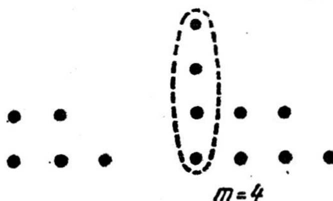
atitinkamas dėmuo. Pavyzdžiui, skirstinį $7=1+1+2+3$ atitinka diagrama, pavaizduota 10 paveiksle.

Kadangi dėmenų tvarka skirstinyje neturi reikšmės, tai eilutes galima išdėstyti taip, kad jų ilgis nemažėtų iš viršaus žemyn. Be to, visų eilučių pirmuosius taškus vaizduosime taip, kad jie sudarytų vertikalų stulpelį. Tokias diagramas vadinsime *normaliomis*.

Remiantis diagramomis, lengva įrodinėti įvairias skirstinių savybes. Įrodysime, pavyzdžiui, kad *skaičiaus N skirstinių, turinčių ne daugiau kaip m dėmenų, yra tiek pat, kiek ir skaičiaus N+m skirstinių į m dėmenų.*



10 pav.



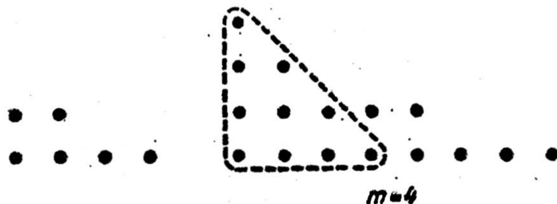
11 pav.

Iš tikrųjų diagrama, vaizduojanti skaičiaus N skirstinį, turintį ne daugiau kaip m dėmenų, sudaryta iš N taškų, išdėstytų ne daugiau kaip m eilutėse. Prie kiekvienos tokios diagramos prijunkime stulpelį, sudarytą iš m taškų (žr. 11 pav., kuriame pavaizduota ši transformacija, kai $N=5$, $m=4$). Gausime diagramą, sudarytą iš $N+m$ taškų, suskirstytų į m eilučių. Atvirkščiai, jei iš bet kurios diagramos, sudarytos iš $N+m$ taškų, suskirstytų į m eilučių, atimsime pirmąjį stulpelį, tai gausime N taškų diagramą, kurios eilučių skaičius bus ne didesnis už m.

Vadinasi, tų dviejų rūšių diagramas galima susieti abipus vienareikšme atitiktimi. Aišku, kad vienų ir kitų diagramų yra po lygiai. Taigi teiginys įrodytas.

Šiek tiek sunkiau įrodyti tokį teiginį (Oilerio teoremą):

Skaičiaus N skirstinių, turinčių ne daugiau kaip m dėmenų, yra tiek pat, kiek ir skaičiaus $N+\frac{m(m+1)}{2}$ *skirstinių į m skirtingų dėmenų.*



12 pav.

Kiekvienas skaičiaus N skirstinys, turintis ne daugiau kaip m dėmenų, vaizduojamas N taškų diagrama, turinčia ne daugiau kaip m eilučių. Prie kiekvienos tokios diagramos pridėkime statų lygiašonį trikampį, sudarytą iš m eilučių, ir gautajai diagramai suteikime normalų pavidalą (žr. 12 pav., kuriame pavaizduota tokia transformacija, kai $N=6$, $m=$

$=4$). Kadangi trikampyje yra $\frac{m(m+1)}{2}$ taškų, tai gausime $N+\frac{m(m+1)}{2}$ taškų diagramą, turinčią m eilučių. Diagramos eilutės bus skirtingo ilgio. Iš tikrųjų, pradinės diagramos eilučių ilgiai nemažėja, o trikampio eilučių ilgiai griežtai didėja. Todėl, pridėjus trikampį, gaunama diagrama, kurios eilučių ilgiai griežtai didėja. Vadinasi, vienodo ilgio eilučių negali būti.

Atvirkščiai, iš kiekvienos diagramos, vaizduojančios skaičiaus $N+$ $+\frac{m(m+1)}{2}$ skirstinį į m skirtingų dėmenų, galima pašalinti statų lygiašonį trikampį, turintį m eilučių. Tada gausime diagramą, vaizduojančią skaičiaus N skirstinį į ne daugiau kaip m dėmenų. Tokia dviejų rūšių diagramų atitiktis įtikina, kad jų skaičiai yra vienodi. Vadinasi, suformuluotasis teiginys įrodytas.

Dualiosios diagramos

Diagramas galima transformuoti taip, kad jų eilutės taptų stulpeliais, o stulpeliai — eilutėmis. Tuo tikslu pasukime diagramą 90° kampu ir gautajai diagramai suteikime normalų pavidalą. 13 paveiksle pavaizduota tokia transformacija.



13 pav.



14 pav.

Aišku, kad, pakartoję transformaciją, iš naujosios diagramos vėl gausime pradinę diagramą. Todėl visų diagramų aibė suskyla į viena kitai dualių diagramų poras (beje, reikia atsiminti, kad kai kurios diagramos yra dualios pačios sau; pavyzdžiui, tokia diagrama pavaizduota 14 paveiksle).

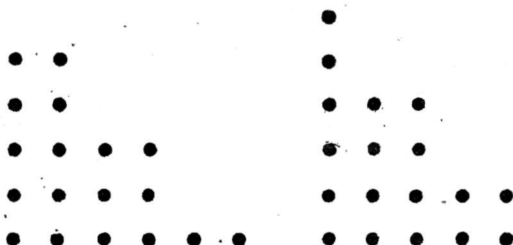
Naudodamiesi diagramų dualumu, galime lyginti skirstinius, tenkinančius kokius nors dėmenų didumo apribojimus, su skirstiniais, tenkinančiais dėmenų kiekio apribojimus. Pavyzdžiui, yra toks teiginys:

Skaičiaus N skirstinių į dėmenis, neviršijančius n, yra tiek pat, kiek ir skaičiaus N skirstinių, turinčių ne daugiau kaip n dėmenų.

Iš tikrųjų skaičiaus N skirstinį į dėmenis, neviršijančius n, vaizduojame N taškų diagrama, kurios kiekvienoje eilutėje yra ne daugiau kaip n taškų. Todėl ta diagrama turi ne daugiau kaip n stulpelių. Tada jai duali diagrama turi ne daugiau kaip n eilučių, t. y. ji atitinka skaičiaus N skirstinį į ne daugiau kaip n dėmenų.

Visiškai panašiai įrodoma, kad *skaičiaus N skirstinių į n dėmenų yra tiek pat, kiek ir skirstinių į dėmenis, kurių bent vienas lygus n, o kiti — ne didesni už n.*

Toliau ištirkime skaičiaus N skirstinius į lyginius dėmenis. Tokie skirstiniai vaizduojami diagramomis, kurių kiekvienoje eilutėje yra lyginis skaičius taškų. Tada dualioje diagramoje kiekvienas dėmuo bus pakartotas lyginį skaičių kartų (15 pav.). Šitaip įrodomas toks teiginys:



15 pav.

Skaičiaus N skirstinių į lyginius dėmenis yra tiek pat, kiek ir to skaičiaus skirstinių, kurių kiekvienas dėmuo kartojamas lyginį skaičių kartų (žinoma, kai kurių dėmenų gali visai nebūti, nes nulis — lyginis skaičius).

Panašiai galima įrodyti ir kitą teiginį:

Skaičiaus N skirstinių į nelyginius dėmenis yra tiek pat, kiek ir to skaičiaus skirstinių, kurių kiekvienas dėmuo, išskyrus didžiausiąjį, kartojamas lyginį skaičių kartų, o didžiausiasis dėmuo — nelyginį skaičių kartų.

Oilerio formulė*

Nagrinėdamas kai kuriuos skaičių skirstymo dėmenimis klausimus, Oileris tyrė begalinę sandaugą

$$A=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\ldots \qquad (26)$$

Sudauginkime šio reiškinio 22 pirmuosius dvinarius. Tada gausime reiškinį

$$A=(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+\ldots)\times$$
$$\times(1-x^{23})(1-x^{24})\ldots(1-x^n)\ldots$$

Daugtaškis čia žymi dėmenis, kuriuose yra aukštesni x laipsniai, negu x^{22}. Mes tų narių neberašėme, nes, padauginus reiškinį, parašytą skliaustuose, iš $1-x^{23}$, $1-x^{24}$ ir t. t., jie pasikeis. Todėl, sudauginę visus dvinarius, gausime begalinę eilutę, kurios pirmieji nariai yra tokie:

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+\ldots \qquad (27)$$

Matome, kad po dviejų neigiamų narių eina du teigiami, paskui — vėl du neigiami ir t. t. Tačiau suvokti, pagal kokį dėsnį reikia rašyti laips-

* Pirmą kartą skaitant, šį skyrelį galima praleisti.

nių rodiklius, daug sunkiau. Ilgai eksperimentavęs, Oileris išvedė tokią taisyklę:

Jei begalinę sandaugą

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)\dots$$

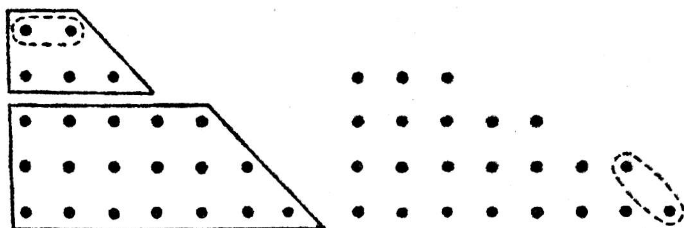
išreikšime eilute, tai joje bus tik nariai $(-1)^k x^{\frac{3k^2 \pm k}{2}}$; *čia k – natūrinis skaičius.*

Oilerio teorema plačiai taikoma ne tik skirstymo dėmenimis teorijoje, bet ir elipsinių funkcijų teorijoje bei kitose matematinės analizės srityse. Tačiau tos teoremos įrodymai dažniausiai yra gana sudėtingi. Čia pateiksime labai paprastą geometrinį Oilerio teoremos įrodymą. Tam suformuluokime Oilerio teoremą skirstinių teorijos terminais.

Sudauginus (26) reiškinio dvinarius, dėmenys $\pm x^N$ kartosis tiek kartų, kiek yra būdų išreikšti skaičių N skirtingų dėmenų suma. Be to, narį x^N gauname tada, kai tų dėmenų skaičius yra lyginis, o $-x^N$, kai dėmenų skaičius nelyginis. Pavyzdžiui, skirstinį $12=5+4+2+1$ atitinka dėmuo $(-x^5)(-x^4)(-x^2)(-x)=x^{12}$, o skirstinį $12=5+4+3$—dėmuo $(-x^5)(-x^4)(-x^3)=-x^{12}$.

Vadinasi, laipsnio x^N koeficientas (27) dėstinyje lygus dviejų skaičių skirtumui: vienas skaičius rodo, kiek yra skaičiaus N skirstinių į lyginį skaičių skirtingų dėmenų, antrasis – kiek yra skirstinių į nelyginį skaičių skirtingų dėmenų. Oilerio teorema teigia:

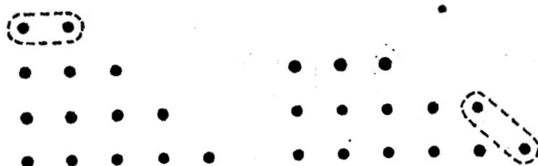
Jei skaičiaus N negalima išreikšti formule $N=\frac{3k^2 \pm k}{2}$, *tai jis turi tiek pat skirstinių į lyginį skaičių dėmenų, kiek ir skirstinių į nelyginį skaičių dėmenų. Kai* $N=\frac{3k^2 \pm k}{2}$, *tų skirstinių skaičių skirtumas lygus* $(-1)^k$ (t. y., jei k — lyginis, tai skirstinių į lyginį skaičių dėmenų yra vienu daugiau, o jei nelyginis, tai skirstinių į nelyginį skaičių dėmenų yra vienu daugiau).



16 pav.

Oilerio teoremos įrodymui pritaikysime vieną būdą diagramai su lyginiu skaičiumi eilučių pakeisti diagrama, sudaryta iš tų pačių taškų, bet turinčia nelyginį skaičių eilučių (ir atvirkščiai). Kadangi nagrinėjame tik skirstinius į skirtingus dėmenis, tai tų skirstinių diagramos yra sudarytos iš kelių trapecijų, sustatytų viena ant kitos. Sakykime, kad viršutinėje diagramos eilutėje yra m taškų ir kad apatinė trapecija turi n eilučių. 16 paveiksle pavaizduota diagrama, kai $m=2$, $n=3$.

Pirmiausia tirsime tą atvejį, kai diagramoje yra bent dvi trapecijos ir, be to, $m \leqslant n$. Šiuo atveju išbrauksime pirmąją eilutę ir prie apatinės trapecijos paskutinių m eilučių pridėsime po vieną tašką (16 pav.). Nuo to bendrasis taškų skaičius nepasikeis, visos eilutės bus skirtingo ilgio, tik iš diagramos su lyginiu skaičiumi eilučių gausime diagramą su nelyginiu eilučių skaičiumi arba atvirkščiai. Tą pačią transformaciją galima pritaikyti ir tada, kai diagramą sudaro viena trapecija ir, be to, $m \leqslant n-1$. Tokia transformacija pavaizduota 17*a* paveiksle.



17a pav.

Dabar tarkime, kad diagramoje yra ne mažiau kaip dvi trapecijos ir, be to, $m > n$. Tada iš paskutinės trapecijos kiekvienos eilutės paimsime po vieną tašką ir iš jų sudarysime pirmąją naujos diagramos eilutę. Kadangi $m > n$, tai sudarytoji eilutė bus trumpesnė už pirmąją pradinės diagramos eilutę. Be to, paėmus po vieną tašką iš visų apatinės trapecijos eilučių, gautoje diagramoje visos eilutės bus skirtingo ilgio. Pagaliau naujoje diagramoje yra tiek pat taškų, kiek ir pradinėje, o eilučių skaičiaus lyginumas pasikeitė: naujoji diagrama turi viena eilute daugiau negu pradinė. Taip transformuoti galima ir diagramas, sudarytas iš vienos trapecijos, jei $n \geqslant m - 2$. Tokia transformacija pavaizduota 17*b* paveiksle. Palyginę 17*a* ir 17*b* paveikslus, įsitikiname, kad *aprašytosios transformacijos yra apverčiamos: jei iš pradžių padarytume vieną transformaciją, o paskui — kitą, tai vėl gautume pradinę diagramą.*

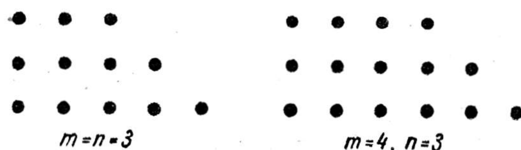


17b pav.

Vadinasi, *skaičiaus N skirstinių diagramos, su kuriomis galima atlikti kurią nors iš aprašytųjų transformacijų, suskirstomos į vienodą skaičių diagramų su lyginiu ir nelyginiu eilučių skaičiumi.* Liko tik išsiaiškinti, kokioms diagramoms neįmanoma pritaikyti aprašytosios transformacijos. Aišku, kad tas diagramas sudaro viena trapecija, ir, be to, arba $m = n$,

arba $m=n+1$. Pirmuoju atveju diagramoje yra $\frac{3n^2-n}{2}$ taškų, antruoju $\frac{3n^2+n}{2}$ taškų (18 pav.).

Iš pateiktųjų samprotavimų matyti: jei N neišreiškiamas formule $\frac{3n^2 \pm n}{2}$, tai jis turi tiek pat skirstinių su lyginiu dėmenų skaičiumi, kiek ir



18 pav.

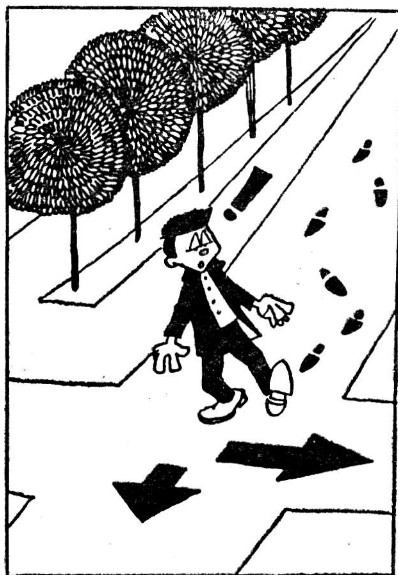
su nelyginiu. Jei $N=\frac{3n^2 \pm n}{2}$, o n – lyginis skaičius, tai lieka viena netransformuojama diagrama su lyginiu eilučių skaičiumi. Todėl skirstinių su lyginiu skaičiumi dėmenų bus vienu daugiau, negu su nelyginiu skaičiumi. Jei $N=\frac{3n^2 \pm n}{2}$, o n – nelyginis skaičius, tai skirstinių su nelyginiu skaičiumi dėmenų bus vienu daugiau. Teorema įrodyta.

V SKYRIUS

KOMBINATORIKA ŠACHMATŲ LENTOJE

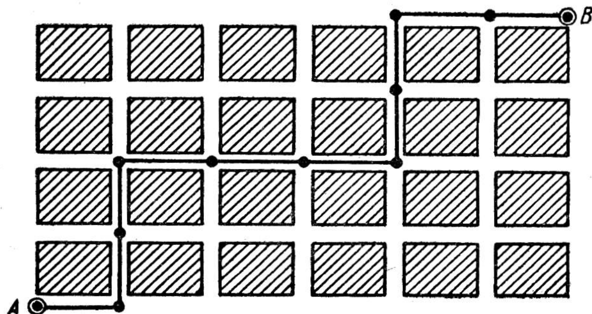
Žmogus klaidžioja po miestą

19 paveiksle pavaizduotas miesto planas (maždaug taip atrodo Australijos sostinės Kanberos planas). *Tame mieste yra $n \times k$ stačiakampių kvartalų, atskirtų vienas nuo kito $n-1$ „horizontaliomis" ir $k-1$ „vertikaliomis" gatvėmis. Keleivis nori nuvykti iš taško A į tašką B trumpiausiu keliu, visą laiką eidamas „iš kairės į dešinę" arba „iš apačios aukštyn". Kiek tokių kelių veda iš A į B?*



Aišku, kad, eidamas bet kuriuo keliu, keleivis turės pereiti $k+n$ sankryžų (įskaitant tašką A, bet neįskaitant taško B). Iš kiekvienos sankryžos jis gali pasukti arba į dešinę, arba aukštyn. Todėl visas sankryžas galima suskirstyti į du tipus. Toms sankryžoms, iš kurių keleivis eina į dešinę, priskirsime skaitmenį 0, o toms, iš kurių jis eina aukštyn, — skaitmenį 1. Kadangi pirmojo tipo sankryžų turi būti k, o antrojo n (kitaip

keleivis nepateks į tašką B), tai gausime kėlinį, sudarytą iš k nulių ir n vienetų. Kiekvieną tokį kėlinį savo ruožtu atitinka koks nors kelias. Pavyzdžiui, 19 paveiksle pavaizduotasis kelias atitinka kėlinį 0110001100.



19 pav.

Kadangi iš k nulių ir n vienetų galima sudaryti

$$P(k,\ n) = C_{n+k}^{n} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \tag{1}$$

kėlinių, tai tiek ir bus trumpiausių kelių, vedančių iš A į B.

Aritmetinis kvadratas

Keleivio klaidžiojimas mieste primena šachmatų bokšto judėjimą. Imkime begalinę šachmatų lentą, iš dviejų pusių apribotą statmenais spinduliais, ir šios lentos kampe pastatykime bokštą. Tarkime, kad bokštas juda lentoje arba iš viršaus žemyn, arba iš kairės į dešinę. Kaitaliodami tuos ėjimus, galime sudaryti įvairius kelius, vedančius iš kampinio langelio į nurodytąjį. Kiekviename langelyje parašykime skaičių, parodantį, kiek skirtingų kelių veda į tą langelį. Aišku, parašytasis skaičius priklauso nuo langelio koordinačių, t. y. nuo to, kurioje vertikalėje ir kurioje horizontalėje yra tas langelis.

Vertikales ir horizontales patogiausia numeruoti skaičiais 0, 1, 2, ..., n, ... Taip numeruojant, kampinio langelio koordinatės bus (0, 0). Remdamiesi praeito uždavinio sprendimo rezultatu, įsitikiname, kad k-tosios vertikalės ir n-tosios horizontalės sankryžoje stovi skaičius C_{n+k}^{k} (norint patekti į tą langelį, reikia padaryti k ėjimų į dešinę ir n ėjimų žemyn). Jei vietoj visų C_{n+k}^{k} parašysime jų skaitines reikšmes, tai gausime 3 lentelę. Ši lentelė vadinama *aritmetiniu kvadratu.*

3 lentelė

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
...	...	...	...	...	...	...

Smulkiau susipažinkime su aritmetinio kvadrato savybėmis. Atidžiai tirdami aritmetinį kvadratą, pastebime tokį dėsningumą: *kiekvienas jame parašytas skaičius lygus artimiausio aukščiau esančio skaičiaus ir skaičiaus, parašyto iš kairės, sumai.* Pavyzdžiui, virš skaičiaus $10=4+6$ parašytas skaičius 4, o iš kairės nuo jo — skaičius 6.

Pastebėtoji taisyklė lengvai gaunama iš anksčiau išvestos lygybės $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (žr. p. 39). Tačiau tą teiginį galima įrodyti ir tiesiog. Iš tikrųjų į langelį (k, n) bokštas gali patekti arba iš langelio $(k-1, n)$, arba iš langelio $(k, n-1)$. Todėl pagal sumavimo taisyklę skaičius būdų patekti į langelį (k, n) lygus dviejų skaičių sumai: pirmasis rodo, kiek yra būdų patekti į langelį $(k-1, n)$, antrasis — kiek yra būdų patekti į langelį $(k, n-1)$. Tai mes ir tvirtiname.

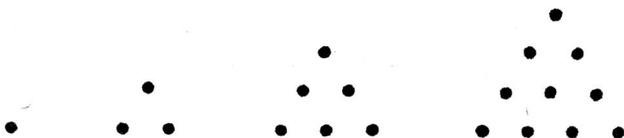
Iš lygybės $C_{n+k}^k = C_{n+k}^n$ matyti, kad aritmetinis kvadratas yra simetriškas įstrižainės, einančios per kampinį langelį, atžvilgiu (toliau ją vadinsime *pagrindine įstrižaine*). Beje, šią savybę taip pat lengva paaiškinti geometriškai: į n-tosios vertikalės ir k-tosios horizontalės sankryžą veda tiek pat kelių, kiek ir į k-tosios vertikalės ir n-tosios horizontalės sankryžą.

Figūriniai skaičiai

Apskaičiuodami 3 lentelės elementus, mes naudojamės ir pirmesnės eilutės, ir pirmesnio stulpelio elementais. Tačiau užtektų vien pirmesnės eilutės elementų. Iš tikrųjų 40 puslapyje išvedėme (15) formulę

$$C_{n+k}^k = C_{n+k-1}^k + C_{n+k-2}^{k-1} + \ldots + C_{n-1}^0,$$

iš kurios matyti, kad kiekvieną 3 lentelės elementą gausime, sudėję pirmesnės eilutės elementus nuo pirmojo iki to elemento, kuris parašytas tiesiog virš apskaičiuojamojo. Vadinasi, nuosekliai sudėdami $(n-1)$-os eilutės elementus, galime vieną po kito apskaičiuoti n-tosios eilutės elementus.



20 pav.

Toks 3 lentelės elementų skaičiavimo metodas yra susijęs su mokslu apie figūrinius skaičius, kuriuos pirmieji pradėjo nagrinėti senovės graikų matematikai Pitagoras ir Nikomachas. Mat skaičius 1, 2, 3, ... galima vaizduoti eilutėmis, kuriose yra vienas, du, trys ir t. t. taškai, ir iš tų eilučių sudaryti trikampius (20 pav.). Tada kiekvieno trikampio taškų skaičius bus lygus atitinkamam skaičiui iš antrosios eilutės*. Todėl skaičiai 1,

---

* Primename, kad eilutes numeruojame skaičiais 0, 1, 2, ... Todėl viršutinė eilutė – nulinė, antroji nuo viršaus – pirmoji ir t. t.

3, 6, 10, 15, 21 ir t. t. vadinami *trikampiniais skaičiais*. Pastebėkime, kad k-tasis trikampinis skaičius lygus

$$C_{k+1}^2 = \frac{(k+1)k}{2}.$$

Visiškai panašiai iš trikampių, pavaizduotų 20 paveiksle, galima sudaryti piramides. Kiekvienos piramidės taškų skaičius lygus atitinkamam skaičiui, parašytam trečioje lentelės eilutėje. Todėl skaičiai 1, 4, 10, 20, 35 ir t. t. vadinami *piramidiniais skaičiais*. Jų bendroji išraiška yra tokia:

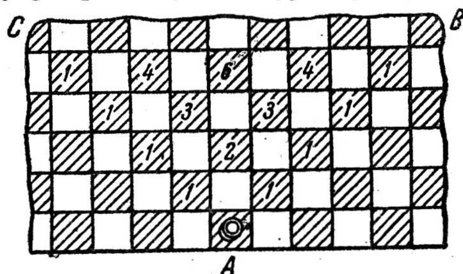
$$C_{k+2}^3 = \frac{(k+2)(k+1)k}{6}.$$

Norint analogiškai interpretuoti tolesnių eilučių skaičius, reikėtų nagrinėti piramides erdvėse, turinčiose daugiau matmenų.

Figūrinių skaičių tyrimas daug šimtmečių domino matematikus; kitados figūrinių skaičių teorija buvo svarbus skaičių teorijos skyrius.

Aritmetinis trikampis

Dabar imkime šaškių lentą, apribotą tik iš vienos pusės, ir nulinės horizontalės langelyje A pastatykime šaškę (21 pav.). Judėdama pagal šaškių ėjimo taisykles, ji gali patekti į bet kurį juodą langelį, esantį tarp



21 pav.

tiesių AB ir AC. Kiekviename langelyje vėl parašykime skaičių, rodantį, keliais būdais šaškė gali patekti į tą langelį. Matome, kad parašytieji skaičiai sutampa su aritmetinio kvadrato skaičiais, tik šį kartą jie kitaip išdėstyti. Tai nenuostabu: pasukus lentą 45° kampu, šaškė judės horizontaliomis ir vertikaliomis tiesėmis, todėl šaškės uždavinys taps bokšto judėjimo uždaviniu. Skaičius, surašytus 21 paveiksle, dažniausiai išdėsto trikampiu (4 lentelė).

4 lentelė

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1
....								

Kiekvienas trikampio skaičius gaunamas, sudėjus du pirmesnės eilutės skaičius, tarp kurių yra ieškomasis skaičius. Tokia lentelė dažnai vadinama Paskalio trikampiu, nors dar prieš Paskalį (1623 – 1662) jį žinojo italų matematikas Tartalija* (1500 – 1557), o daug anksčiau tas trikampis buvo aprašytas arabų matematikų Gijasedino ir Omaro Chajamo darbuose. Todėl jį vadinsime tiesiog aritmetiniu trikampiu.

Aritmetinį trikampį galima parašyti ir šitaip:

5 lentelė

1	0	0	0	0	0	...
1	1	0	0	0	0	...
1	2	1	0	0	0	...
1	3	3	1	0	0	...
1	4	6	4	1	0	...
1	5	10	10	5	1	...
...	...	...	...	...	...	...

Čia k-tosios vertikalės ir n-tosios horizontalės sankryžoje stovi skaičius C_n^k (primename, kad kraštinės tiesės turi nulinius numerius). Kiekvienas šio trikampio skaičius gaunamas, sudėjus skaičių, esantį virš jo, su skaičiumi, esančiu pirmesnėje eilutėje įstrižai į kairę. Pavyzdžiui, virš ketvirtoje eilutėje parašyto skaičiaus 4 stovi skaičius 1, o įstrižai į kairę nuo 4 — skaičius 3; $4=1+3$.

Atkreipkime dėmesį dar į tokias aritmetinio trikampio savybes: *visi elementai virš pagrindinės įstrižainės lygūs nuliui, o nulinis stulpelis sudarytas iš vienetų*. Skaičiai, surašyti n-toje aritmetinio trikampio eilutėje, t. y. skaičiai C_n^k, kai n — fiksuotas skaičius, yra binomo $(1+x)^n$ dėstinio kintamojo x laipsniais koeficientai. Todėl jie dažnai vadinami *binominiais koeficientais*. Apie tai smulkiau kalbėsime VII skyriuje.

Išplėstinis aritmetinis trikampis

Aritmetinis trikampis užima tik dalį plokštumos. Išplėsime jį į visą plokštumą, palikdami galioti anksčiau suformuluotą taisyklę: *kiekvienas elementas gaunamas, sudėjus elementą, parašytą virš jo, su pirmesnės eilutės elementu, esančiu įstrižai į kairę*. Aritmetinio trikampio nulinis stulpelis sudarytas iš vienetų, todėl ir išplėstame trikampyje tą stulpelį užpildysime vienetais.

Taikydami nurodytąją taisyklę nulinio stulpelio elementams, įsitikiname, kad prieš jį turi būti stulpelis, užpildytas nuliais. Tačiau tada ir visi tolesni stulpeliai kairėje bus sudaryti tik iš nulių. Todėl reikia tik

* Tartalija buvo įžymus matematikas. Be aritmetinio trikampio, jis surado kubinės lygties sprendinių formulę. Apie tą formulę jis papasakojo kitam italų matematikui D. Kardanui, iš anksto prisaikdinęs, kad šis niekam neišduos paslapties. Bet Kardanas neužilgo tą sprendinių formulę paskelbė savo algebros vadovėlyje. Todėl kubinių lygčių sprendinių formulė visiškai neteisingai vadinama „Kardano formule".

išsiaiškinti, kokie elementai stovi virš nulinės eilutės. Įstrižai nuo pirmojo nulinės eilutės elemento stovi skaičius 1, o pats tas elementas lygus nuliui. Todėl virš jo reikia rašyti — 1, nes $1+(-1)=0$. Bet tada, norint gauti nulį ir antroje nulinės eilutės vietoje, virš antrosios vietos reikia rašyti skaičių 1. Taip tęsdami toliau, įsitikinsime, kad virš nulinės eilutės atsiranda nauja eilutė, sudaryta iš pakaitomis einančių skaičių 1 ir —1. Panašiai užpildomos ir aukščiau esančios eilutės.

Galų gale gausime lentelę, kurios dalį pateikiame:

6 lentelė

...	0	1	−5	15	−35	70	−196	...
...	0	1	−4	10	−20	35	−56	...
...	0	1	−3	6	−10	15	−21	...
...	0	1	−2	3	− 4	5	− 6	...
...	0	1	−1	1	− 1	1	− 1	...
...	0	1	0	0	0	0	0	...
...	0	1	1	0	0	0	0	...
...	0	1	2	1	0	0	0	...
...	0	1	3	3	1	0	0	...
...	0	1	4	6	4	1	0	...
...	0	1	5	10	10	5	1	...
......		......	......	......	......	......	......	......

Įsižiūrėję į tos lentelės dalį, esančią virš nulinės eilutės, įsitikiname, kad nuo aritmetinio kvadrato, pateikto 90 puslapyje, ji skiriasi tik elementų ženklais, būtent, $(-n)$-tosios horizontalės ir k-tosios vertikalės susikirtime yra skaičius $(-1)^k C_{n+k-1}^k$. Žinoma, išnagrinėję lentelės dalį, dar neįrodėme, kad tas teiginys teisingas visoms eilutėms ir visiems stulpeliams. Norėdami įsitikinti, jog tas teiginys teisingas, pastebėsime, kad

$$(-1)^k C_{n+k-1}^k + (-1)^{k-1} C_{n+k-2}^{k-1} =$$
$$= (-1)^k [C_{n+k-1}^k - C_{n+k-2}^{k-1}] = (-1)^k C_{n+k-2}^k$$

(žr. (11) formulę, p. 39). Iš gautosios lygybės matyti, kad lentelėje, sudarytoje iš skaičių $(-1)^k C_{n+k-1}^k$, $(-n+1)$-osios eilutės k-tasis elementas gaunamas, sudėjus $(-n)$-tosios eilutės k-tąjį ir $(k-1)$-ąjį elementus. Kitaip sakant, lentelės sudarymo iš skaičių $(-1)^k C_{n+k-1}^k$ taisyklė sutampa su išplėsto aritmetinio trikampio lentelės užpildymo taisykle. Be to, šios lentelės turi vienodas eilutes su numeriu -1 ir vienodus nulinius stulpelius. Todėl visi jų elementai sutampa.

Pradinio aritmetinio trikampio n-tosios horizontalės ir k-tosios vertikalės susikirtime stovėjo skaičius C_n^k. Išplėstinio trikampio $(-n)$-tosios horizontalės ir k-tosios vertikalės susikirtime stovi skaičius $(-1)^k C_{n+k-1}^k$. Todėl simbolį C_n^k galima apibendrinti, susitarus, kad

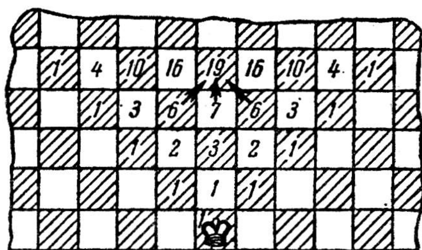
$$C_{-n}^k = (-1)^k C_{n+k-1}^k. \qquad (2)$$

Čia n — natūrinis skaičius.

Iš (6) lentelės matyti, kad simbolio C_n^k apibendrinimas neigiamoms k reikšmėms yra trivialus: $C_n^k=0$, kai $k<0$ (žr. taip pat p. 149). Be to, $C_n^k=0$, kai $0\leqslant n<k$.

Šachmatų karalius

Aritmetinį trikampį galima sudaryti šitaip. Viršutiniame kairiajame lentelės kampe pastatykime „vienpusį" šachmatų karalių, t. y. figūrą, kuri gali eiti tik į langelį priekyje ir į langelį įstrižai į dešinę. Kiekviename langelyje parašę skaičių, rodantį, keliais būdais figūra gali ateiti į tą langelį, gausime aritmetinį trikampį.



22 pav.

Dabar „vienpusį" karalių pakeiskime paprastu šachmatų karaliumi, jo judėjimą apribodami tik viena sąlyga: tas karalius visada turi eiti pirmyn, į tolesnę horizontalę. Kad jis galėtų išnaudoti savo naujas galimybes, reikia praplėsti lentą, būtent, imti lentą, apribotą tiese tik iš vienos pusės. 22 paveiksle pavaizduota tokia lenta, o jos kiekviename langelyje nurodyta, keliais būdais į tą langelį gali ateiti karalius, pradėjęs kelionę iš langelio A.

Išsiaiškinsime, kaip sudaryta naujoji lentelė. Tarkime, kad jau žinome, keliais būdais karališkasis klajūnas gali patekti į kiekvieną $(n-1)$-os horizontalės langelį. Apskaičiuokime, keliais būdais pasiekiami n-tosios horizontalės langeliai. Į kiekvieną šių langelių karalius gali patekti iš gretimųjų $(n-1)$-os horizontalės langelių (iš esančių tiesiog po juo, įstrižai į dešinę ir įstrižai į kairę, žr. 22 paveikslą). Remdamiesi sumavimo taisykle, gauname tokią išvadą:

Skaičius būdų, kuriais šachmatų karalius gali patekti į kurį nors n-tosios horizontalės langelį, lygus sumai trijų skaičių, reiškiančių, keliais būdais jis gali patekti į gretimuosius $(n-1)$*-osios horizontalės langelius.*

Be to, tariama, kad patekti į langelį, kuriame karalius stovi pačioje pradžioje, yra vienas būdas (nejudėti iš vietos), o patekti į kitus nulinės horizontalės langelius nėra nė vieno būdo.

22 paveiksle pateiktąjį trikampį galima pavaizduoti kitaip: pastumti visus skaičius į dešinę, kad lentelė tilptų lentos dalyje, apribotoje dviem statmenais vienas kitam spinduliais.

7 lentelė

0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0	0	0
0	0	1	3	6	7	6	3	1	0	0
0	0	1	4	10	16	19	16	10	4	1
....		....								

Šiuo atveju kiekvieno lentelės skaičiaus radimo taisyklė formuluojama šitaip:

Kiekvienas skaičius lygus trijų pirmesnės eilutės skaičių sumai: vienas tų skaičių stovi virš ieškomojo, o kiti du — iš kairės nuo jo. Be to, kampe yra skaičius 1, o kiti nulinės eilutės elementai lygūs nuliui.

Pavyzdžiui, ketvirtos eilutės skaičius 16 yra trečiosios eilutės skaičių 3, 6 ir 7 suma.

Visiškai aišku, kaip toliau apibendrinti aritmetinį trikampį. Pasirinksime kokį nors natūrinį skaičių m ir užpildysime lentelę, laikydamiesi tokios taisyklės: kairiajame viršutiniame kampe parašysime skaičių 1, o visuose kituose nulinės eilutės langeliuose — nulius. Paskui kiekviename pirmosios eilutės langelyje parašysime sumą, kurią gausime, sudėję m nulinės eilutės elementų, kurių paskutinis yra tiesiog virš ieškomojo. Aišku, kad pirmoje eilutėje m pirmųjų elementų bus vienetai, o visi kiti — nuliai. Jei, sudarant sumą, trūksta dėmenų, tai trūkstamieji dėmenys laikomi lygiais nuliui; kitaip sakant, prie lentelės iš kairės prijungiama nulių lentelė (žr. 7 lentelę).

Panašiai užpildomos ir kitos lentelės eilutės, būtent, kiekvienas lentelės elementas lygus m pirmesnės eilutės elementų sumai: elemento, stovinčio virš ieškomojo, ir $m-1$ elementų, stovinčių prie jo iš kairės. Aritmetinis trikampis yra atskiras atvejis: jis gaunamas, kai $m=2$. Trikampis, pateiktas 7 lentelėje, atitinka $m=3$.

Kad galėtume atskirti aritmetinius trikampius su skirtingomis m reikšmėmis, juos vadinsime m-skaičiais aritmetiniais trikampiais. Elementą, stovintį m-skaičio aritmetinio trikampio n-tosios horizontalės ir k-tosios vertikalės susikirtime, žymėsime $C_m(k, n)$. Iš m-skaičio aritmetinio trikampio apibrėžimo matyti, kad skaičiūs $C_m(k, n)$ sieja tokia lygybė:

$$C_m(k, n)=C_m(k, n-1)+$$
$$+C_m(k-1, n-1)+\ldots+C_m(k-m+1, n-1). \quad (3)$$

Be to, $C_m(k,1)=1$, kai $0\leqslant k\leqslant m-1$, ir $C_m(k, 1)=0$, kai $k\geqslant m$.

Apibendrintieji aritmetiniai trikampiai ir m-tainė skaičiavimo sistema

Skaičiai $C_m(k, n)$ yra susiję su m-taine skaičiavimo sistema, būtent, $C_m(k, n)$ rodo, kiek m-tainėje skaičiavimo sistemoje yra n-ženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi k.

Terminą „n-ženklis skaičius" čia vartojame plačiąja prasme, tardami, kad skaičius gali prasidėti vienu ar keliais nuliais. Pavyzdžiui, 001 215 laikome šešiaženkliu skaičiumi, kurio skaitmenų suma lygi 9.

Suformuluotajam teiginiui įrodyti m-tainės skaičiavimo sistemos n-ženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi k, kiekį pažymėsime $B_m(k, n)$. Įrodysime, kad skaičiai $B_m(k, n)$ yra susieti tuo pačiu (3) ryšiu, kaip ir $C_m(k, n)$. Iš tikrųjų skaičiaus, parašyto m-tainėje skaičiavimo sistemoje, paskutinis skaitmuo gali įgyti vieną iš reikšmių $0, 1, \ldots, m-1$. Todėl, nubraukus n-ženklio skaičiaus paskutinį skaitmenį, gaunamas $(n-1)$-ženklis skaičius, kurio skaitmenų suma gali įgyti reikšmes $k, k-1, \ldots, k-m+1$. Pritaikę sumavimo taisyklę, turėsime:

$$B_m(k, n)=B_m(k, n-1)+\ldots+B_m(k-m+1, n-1). \tag{4}$$

Be to, aišku, kad $B_m(k, 1)$ lygus 1, kai $0\leqslant k\leqslant m-1$, ir 0 kitais atvejais (jei $0\leqslant k\leqslant m-1$, tai m-tainėje skaičiavimo sistemoje yra tik vienas vienaženklis skaičius, kurio skaitmenų suma lygi k, o jei $k\geqslant m$, tokio skaičiaus visai nėra). Vadinasi, skaičių $B_m(k, n)$ lentelės pirmoji eilutė sutampa su skaičių $C_m(k, n)$ pirmąja eilute. Kadangi tų lentelių sudarymo taisyklės, reiškiamos (3) ir (4) lygybėmis, irgi sutampa, tai $B_m(k, n)=C_m(k, n)$ su bet kokiomis k ir n reikšmėmis.

Kai kurios skaičių $C_m(k, n)$ savybės

Skaičiai $C_m(k, n)$ turi daug savybių, primenančių skaičių C_n^k savybes. Tai nenuostabu, nes iš aritmetinio trikampio sudarymo matyti, kad $C_2(k, n)=C_n^k$. Pirmiausia pabrėšime, kad $C_m(k, n)$ nelygus nuliui tik tada, kai $0\leqslant k\leqslant n(m-1)$. Taip yra todėl, kad kiekvienoje m-skaičio aritmetinio trikampio eilutėje yra $m-1$ skaičių daugiau, negu pirmesnėje eilutėje.

Įsitikinsime, kad skaičiai $C_m(k, n)$ turi tokią simetriškumo savybę:

$$C_m(k, n)=C_m\big(n(m-1)-k, n\big). \tag{5}$$

Kiekvienam n-ženkliui skaičiui m-tainėje skaičiavimo sistemoje priskirkime „papildinį", kurį gausime, visus to skaičiaus skaitmenis pakeitę papildiniais iki $m-1$. Pavyzdžiui, septintainėje skaičiavimo sistemoje skaičiaus 3 140 216 papildiniu laikysime skaičių 3 526 450. Taigi, kai duotojo skaičiaus skaitmenų suma lygi k, papildinio skaitmenų suma bus lygi $n(m-1)-k$. Todėl n-ženklių skaičių su skaitmenų suma k yra tiek pat, kiek ir su skaitmenų suma $n(m-1)-k$. Kaip tik tai išreiškia (5) lygybė.

Kadangi m-tainėje skaičiavimo sistemoje yra iš viso m^n n-ženklių skaičių (žr. p. 8), tai teisinga lygybė

$$C_m(0, n)+C_m(1, n)+\ldots+C_m\big(n(m-1), n\big)=m^n. \tag{6}$$

Dabar įrodysime, kad

$$C_m(0, l)\,C_m(k, n-l)+C_m(1, l)\,C_m(k-1, n-l)+\ldots+$$
$$+C_m(k, l)\,C_m(0, n-l)=C_m(k, n), \tag{7}$$

kai $0\leqslant l\leqslant n$. Tuo tikslu visus n-ženklius skaičius, kurių skaitmenų suma lygi k, suskirstysime į klases. Skaičius, kurių pirmųjų l skaitmenų suma lygi s, priskirsime s-tajai klasei. Tų skaičių paskutiniųjų $n-l$ skaitmenų suma lygi $k-s$. Iš dauginimo taisyklės matyti, kad s-toje klasėje yra $C_m(s, l)\,C_m(k-s, n-l)$ skaičių. Kadangi visų n-ženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi k, kiekis lygus $C_m(k, n)$, tai pagal sumavimo taisyklę galima rašyti (7) lygybę.

Atskiru atveju, kai $l=1$, iš (7) lygybės gauname (3) lygybę, nes $C_m(k,\ 1)=1$, kai $0\leqslant k\leqslant m-1$, ir $C_m(k,\ 1)=0$, kai $k\geqslant m$.

Baigdami šį skyrelį, įsitikinsime, kad

$$C_n^0 C_{m-1}(k-n,\ n)+C_n^1 C_{m-1}(k-n+1,\ n-1)+\ldots+C_n^s C_{m-1}(k-n+s,\ n-s)+$$
$$+\ldots+C_n^n C_{m-1}(k,\ 0)=C_m(k,\ n). \qquad (8)$$

Visus m-tainės skaičiavimo sistemos n-ženklius skaičius, kurių skaitmenų suma lygi k, suskirstysime į klases. Tuos skaičius, kurių m-tainėje išraiškoje yra lygiai s nulių, $0\leqslant s\leqslant n$, priskirsime s-tajai klasei.

Apskaičiuokime, kiek skaičių priklauso s-tajai klasei. Kiekvieną s-tosios klasės skaičių galima sudaryti dviem etapais. Pirma pasirenkame vietas, kuriose bus rašomi nuliai. Kadangi tiriami n-ženkliai skaičiai, o nulių skaičius lygus s, tai pasirinkti nulių vietas yra C_n^s būdų. Paskui išbraukiame visus nulius ir likusius skaitmenis sumažiname vienetu. Gausime $(n-s)$-ženklį skaičių, užrašytą skaitmenimis $0,\ 1,\ \ldots,\ m-2$ (t. y. $(m-1)$-tainės skaičiavimo sistemos skaičių), kurio skaitmenų suma lygi $k-(n-s)=k-n+s$. Tokių skaičių yra $C_{m-1}(k-n+s,\ n-s)$. Iš šių samprotavimų matyti, kad s-tąją klasę sudaro $C_n^s C_{m-1}(k-n+s,\ n-s)$ skaičių. Kadangi visų n-ženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi k, kiekis lygus $C_m(k,\ n)$, tai, remdamiesi sumavimo taisykle, gauname (8) sąryšį.

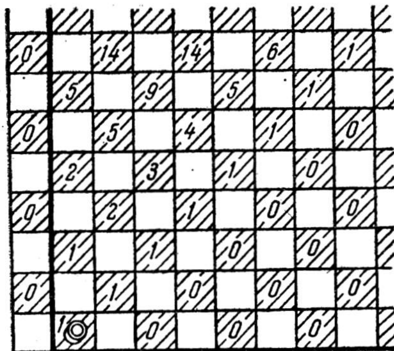
Kadangi $C_2(k,\ n)=C_n^k$, tai iš (8) lygybės, kaip atskiras atvejis, išplaukia lygybė

$$C_3(k,\ n)=C_n^0 C_n^{k-n}+C_n^1 C_{n-1}^{k-n+1}+\ldots+C_n^n C_0^k.$$

Pritaikę (8) formulę keletą kartų, gautume $C_m(k,n)$ išraišką binominiais koeficientais.

Šaškė kampe

Begalinės šachmatų lentos, apribotos dviem statmenais spinduliais, kampe pastatykime šaškę (23 pav.)*. Kiekviename lentos langelyje parašykime, keliais būdais šaškė gali į jį patekti. Rezultatas skirsis nuo to,



23 pav.

kurį gavome, kai lenta buvo apribota tik viena tiese (žr. p. 92): dabar šaškė negali peržengti vertikaliosios tiesės. Todėl galimybių patekti į kokį nors langelį liko mažiau: eidama į tą langelį, šaškė negali perdaug nukrypti į kairę. Pavyzdžiui, į langelius prie ribinės tiesės ji gali patekti

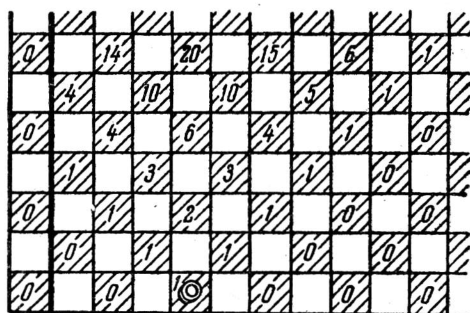
* Paveiksle pavaizduotas papildomas stulpelis, kurio reikės tolesniems samprotavimams.

tik iš vieno langelio, o ne iš dviejų, kaip 92 puslapyje. Ten buvo pasakyta, kad skaičius, parašytas bet kuriame juodajame langelyje, lygus sumai dviejų skaičių, parašytų pirmesnės horizontalės gretimuose juoduose langeliuose. Kad tas dėsnis galiotų ir dabar, reikia sudaryti dar vieną vertikalę iš kairės nuo ribinės tiesės ir kiekviename jos juodajame langelyje parašyti nulį (į tą langelį patekti neįmanoma).

Apskaičiuosime, keliais būdais galima patekti į kurį nors langelį, laikantis nurodytųjų taisyklių. Kiekvieną kelią galima apibūdinti nulių ir vienetų seka: nulis reiškia ėjimą kairėn, o vienetas — dešinėn. Tada nulių ir vienetų kiekis priklausys tik nuo langelio, į kurį turi patekti šaškė. Pavyzdžiui, kiekvienu keliu, sudarytu iš 4 nulių ir 6 vienetų, galima patekti tik į langelį, esantį antrosios vertikalės ir dešimtosios horizontalės susikirtime (kaip ir anksčiau, kraštinėms linijoms priskyrėme nulinius numerius).

Pastebėsime, kad ne kiekviena nulių seka čia galima. Pavyzdžiui, negalima pradėti nuo nulio: tuo ėjimu šaškė iš karto peržengtų ribinę tiesę. Štai kas būdinga galimoms sekoms: prieš bet kurią sekos vietą yra ne mažiau vienetų, negu nulių (kiekvienu momentu ėjimų dešinėn turi būti ne mažiau, negu ėjimų kairėn: kitaip šaškė atsidurs už lentos ribų).

Vadinasi, reikia apskaičiuoti, *kiek sekų, sudarytų iš k nulių ir m vienetų, turi šią savybę: prieš kiekvieną sekos narį vienetų yra ne mažiau, negu nulių.* Tokį uždavinį jau sprendėme 60 puslapyje (tik vietoj nulių ir vienetų rašėme raides r ir p). Tada įrodėme, kad tokių sekų skaičius lygus $\frac{m-k+1}{m+1} C_{m+k}^{k}$. Tą skaičių ir reikia parašyti $(m+k)$-tosios horizontalės ir $(m-k)$-tosios vertikalės susikirtime.



24 pav.

Dabar pastatykime šaškę ne kampe, bet nulinės horizontalės q-tajame langelyje (jis gali būti ir baltas, nors tai prieštarauja šaškių taisyklėms). Dabar šaškė turi q atsarginių ėjimų į kairę. Tai atitinka 61 puslapyje išnagrinėtą uždavinį, kai kasininkas turėjo q pusrublių atsargą. Pasinaudoję ten gautu atsakymu, padarome išvadą: jei šaškė patenka į kurį nors langelį po k ėjimų kairėn ir m ėjimų dešinėn, $0 \leqslant k \leqslant m+q$, tai skirtingų būdų patekti į tą langelį skaičius lygus $C_{m+k}^{k} - C_{m+k}^{k-q-1}$. 24 paveiksle pateikta lentelė, atitinkanti $q=3$.

Aritmetinis penkiakampis

Pasukime šachmatų lentą 45° kampu. Tada šaškė judės vertikaliomis ir horizontaliomis tiesėmis, o ribinė tiesė su jomis sudarys 45° kampus. Todėl kampe pastatytos šaškės uždavinys bus analogiškas tokiam:

Šachmatų lentos kampe stovi bokštas. Keliais būdais jis gali patekti į langelį (m, k), *eidamas trumpiausiu keliu ir neperžengdamas lentos įstrižainės* (įstrižainės langeliuose bokštui stovėti leidžiama)?

Iš anksčiau įrodytųjų teiginių matyti, kad tų būdų skaičius lygus $\frac{m-k+1}{m+1} C_{m+k}^{k}$, kai $k \leqslant m$, arba nuliui, kai $k > m$. Jei įstrižainę pastumsime per q langelių į dešinę, tai atsakymas bus toks: kai $0 \leqslant k \leqslant m+q$, būdų skaičius lygus $C_{m+k}^{k} - C_{m+k}^{k-q-1}$, o kai $k > m+q$, —nuliui.

Jei šachmatų lenta yra baigtinė, tai tos lentelės skaičiai, nelygūs nuliui, užpildo penkiakampį (25 pav.). Jis vadinamas *aritmetiniu penkiakampiu*. Taip vadinama ir lentelė, kuri gaunama begalinėje lentoje, apribotoje dviem statmenais spinduliais.

Pagrindinė aritmetinio penkiakampio savybė sutampa su aritmetinio kvadrato savybe: kiekvienas aritmetinio penkiakampio skaičius lygus dviejų skaičių sumai — vienas jų yra virš ieškomojo skaičiaus, antras — iš kairės nuo ieškomojo. Aritmetinis penkiakampis skiriasi nuo aritmetinio kvadrato tuo, kad penkiakampio įstrižainė, esanti per q langelių aukščiau už pagrindinę įstrižainę, sudaryta iš nulių (tuo penkiakampis primena aritmetinį trikampį, nagrinėtą 92 puslapyje).

1	1	1	1	0	0	0
1	2	3	4	4	0	0
1	3	6	10	14	14	0
1	4	10	20	34	48	48

25 pav.

1	1	1	1	1	0	0
1	2	3	4	5	5	0
1	3	6	10	15	20	20
1	4	10	20	35	55	75
0	4	14	34	69	124	199
0	0	14	48	117	241	340

26 pav.

Dabar imsime šachmatų lentą, apribotą dviem vienas kitam statmenais spinduliais, ir nubrėšime joje ne vieną, bet dvi tieses, lygiagrečias pagrindinei įstrižainei: vieną — q langelių aukščiau už ją, o kitą — s langelių žemiau. Abi šias tieses laikysime bokšto „draudžiamomis zonomis". Kiekviename lentos langelyje parašysime skaičių, rodantį, keliais būdais bokštas gali ateiti į tą langelį. Gautoji skaičių lentelė vadinama *aritmetiniu šešiakampiu*. 26 paveiksle pavaizduota tokia lentelė, kai $q=4$, $s=3$.

Aritmetinį šešiakampį galima interpretuoti ir kitaip. Imkime šachmatų lentą, apribotą $s+q+1$ langelių atkarpa ir dviem tai atkarpai statmenais

spinduliais. Langelyje, nutolusiame nuo vieno kampo per s langelių, o kito — per q langelių, pastatykime šaškę. Kiekviename langelyje parašykime skaičių, rodantį, keliais būdais šaškė gali jį pasiekti. Pasukę sudarytąją lentelę 45° kampu, gausime aritmetinį šešiakampį.

Geometrinis derinių savybių įrodymo būdas

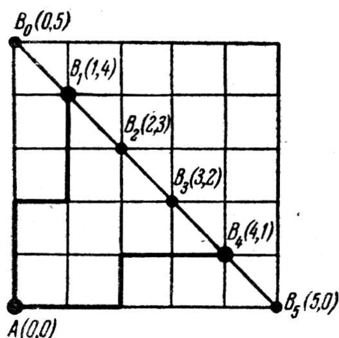
II skyriuje aprašėme kai kurias derinių savybes. Dabar, remdamiesi geometriniais samprotavimais, parodysime, kaip tas savybes paaiškinti vaizdžiau.

Pirmiausia paaiškinsime, kaip išvedama lygybė

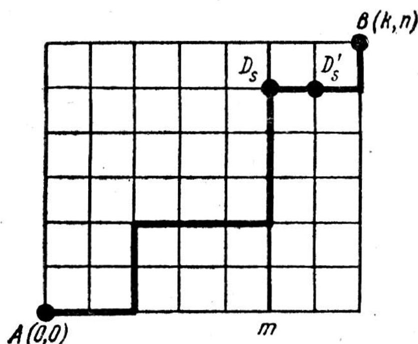
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \qquad (9)$$

Tam išnagrinėsime visus kelius, einančius iš taško $A(0, 0)$ į taškus $B_k(k, n-k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$ (27 pav.).

Tuos kelius skirstome į klases, atsižvelgdami į tai, kokiame taške B_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ jie baigiasi. Į pasirinktą tašką eina $P(k, n-k) = C_n^k$ kelių. Todėl mums belieka rasti visų nagrinėjamųjų kelių skaičių. Kiekvieno tokio kelio ilgis lygus n. Jį galima užšifruoti nulių ir vienetų seka, turinčia n narių: horizontaliosioms atkarpoms priskiriame nulius, o vertikaliosioms — vienetus. Kadangi skaičius n-narių sekų iš nulių ir vienetų lygus 2^n, tai (9) lygybė teisinga.



27 pav.



28 pav.

91 puslapyje geometriškai išvedėme lygybes

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad \text{ir} \quad C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Tuo pačiu metodu galima gauti ir sudėtingesnes lygybes. Nubrėžkime vertikalią tiesę, kurios abscisė lygi m, $0 \leqslant m \leqslant k$ (28 pav.). Kiekvienas kelias, einąs iš taško $A(0, 0)$ į tašką $B(k, n)$, kerta nubrėžtąją tiesę, o dalis kelio galbūt net yra toje tiesėje. Visų kelių, einančių iš A į B, aibę suskirstysime į klases, s-tajai klasei priskirdami tuos kelius, kurių paskutinis bendrasis taškas su tiese $x = m$ yra taškas $D_s(m, s)$. Apskaičiuosime, kiek kelių, jungiančių taškus A ir B priklauso s-tajai klasei. Kiekvieną tokį

kelią sudaro kelias iš A į D_s, — atkarpa, jungianti taškus $D_s(m, s)$ ir D'_s $(m+1, s)$ (juk D_s — paskutinis tiesės $x=m$ taškas šiame kelyje!), ir kelias iš taško $D'_s(m+1, s)$ į tašką $B(k, n)$.

Pagal (1) formulę iš taško $A(0, 0)$ į tašką $D_s(m, s)$ eina $P(m, s)$ kelių. Iš taško $D'_s(m+1, s)$ į tašką $B(k, n)$ eina $P(k-m-1, n-s)$ kelių (norint iš D'_s nuvykti į B, reikia praeiti $k-m-1$ vienetinių atkarpų į dešinę ir $n-s$ vienetinių atkarpų aukštyn). Visų s-tosios klasės kelių skaičių gauname, taikydami dauginimo taisyklę:

$$P(m, s)P(k-m-1, n-s).$$

Kadangi iš A į B iš viso eina $P(k, n)$ kelių, tai pagal sumavimo taisyklę

$$P(k, n)=P(m, 0)P(k-m-1, n)+$$
$$+P(m, 1)P(k-m-1, n-1)+\dots+P(m, n)P(k-m-1, 0).$$

Šitą lygybę galima parašyti ir kitaip:

$$C_{n+k}^{k}=C_{m}^{m}C_{n+k-m-1}^{k-m-1}+C_{m+1}^{m}C_{n+k-m-2}^{k-m-1}+\dots+C_{m+n}^{m}C_{k-m-1}^{k-m-1} \tag{10}$$

(plg. (24) formulę iš 42 puslapio).

Atskiru atveju, kai $m=k-1$, iš (10) lygybės gauname tokią lygybę:

$$C_{n+1}^{k}=C_{k-1}^{k-1}+C_{k}^{k-1}+\dots+C_{k+s-1}^{k-1}+\dots+C_{k+n-1}^{k-1}. \tag{11}$$

Pastebėsime, kad (10) ir (11) lygybes galima išvesti, keletą kartų pritaikius lygybę $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$.

Įrodykite patys geometriškai 41 puslapyje pateiktą (23) formulę:

$$C_{n+k}^{n}=C_{n+k-s}^{n}C_s^0+C_{n+k-s}^{n-1}C_s^1+\dots+C_{n+k-s}^{n-m}C_s^m+\dots+C_{n+k-s}^{n-s}C_s^s, \tag{12}$$

jei $0\leqslant s\leqslant k$, $0\leqslant s\leqslant n$.

Tuo tikslu per taškus $D(k-s, n)$ ir $E(k, n-s)$ nubrėžkite tiesę ir visus kelius iš $A(0, 0)$ į $B(k, n)$ suskirstykite į klases, atsižvelgdami į tai, per kokį tiesės tašką jie eina. (12) formulė tik žymėjimais skiriasi nuo (23) formulės, pateiktos 41 puslapyje.

Tuo pačiu geometriniu metodu galima išvesti daug kitų lygybių, siejančių skaičius C_{n+k}^k: reikia kelius, einančius iš $A(0, 0)$ į $B(k, n)$, skirstyti kitais būdais į klases.

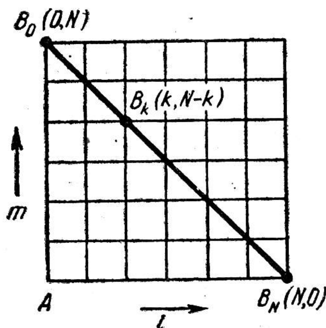
Norint analogiškai gauti skaičių $P(n_1, \dots, n_k)$ sąryšius (žr. (27) ir (28) formules 42 ir 43 puslapyje), reikėtų naudotis daugiamate geometrija. Mes čia to klausimo nespręsime.

Pabrėšime, kad skaičių C_n^k sąryšiai, nurodyti 63 — 65 puslapiuose, irgi paaiškinami geometriškai. Tam reikia imti šachmatų lentą su nubrėžta joje tiese, lygiagrečia pagrindinei įstrižainei, ir išnagrinėti kelius, nekertančius tos tiesės (bet galbūt turinčius su ja bendrų taškų). Įvairiais būdais skirstydami tų kelių aibę į klases, gauname III skyriuje išvestas formules.

Uždavinio apie eilę prie kasos sprendimą galima labai paprastai paaiškinti geometriškai. Bilietų pirkimą galime vaizduoti grafiškai, kiekvienam pusrubliui priskirdami horizontalią atkarpą, o kiekvienam rubliui — vertikalią. Iš uždavinio sąlygos matyti, kad tas grafikas neturi kirsti pagrindinės įstrižainės. Sprendžiant atliktos transformacijos (pridėjimas prie eilės vieno žmogaus su pusrubliu ir pusrublių keitimas rubliais, o rublių — pusrubliais) įgyja paprastą geometrinę prasmę: tai eilės ėjimo pro kasą grafiko atsispindėjimas tiesėje, lygiagrečioje pagrindinei įstrižainei ir nutolusioje nuo jos per ilgio vienetą. Skaitytojui siūlome išversti į „geometrinę kalbą" samprotavimus, kuriais rėmėmės, spręsdami tą uždavinį.

Atsitiktinis klaidžiojimas

Išspręstieji šachmatų figūrų judėjimo uždaviniai glaudžiai siejasi su svarbiomis fizikai atsitiktinių klaidžiojimų problemomis. Išnagrinėsime uždavinį, spręstą 1945 metais VIII Maskvos matematikų olimpiadoje.



29 pav.

Yra kelių tinklas (29 pav.). *Iš taško A išeina* 2^N *žmonių. Pusė tų žmonių eina kryptimi l, pusė — kryptimi m. Priėjusi pirmąją sankryžą, kiekviena grupė pasidalija: pusė grupės pasuka kryptimi l, pusė — kryptimi m. Šitaip grupės skaidosi kiekvienoje sankryžoje. Kur atsidurs tie žmonės, nuėję N atkarpų, ir kiek žmonių tada bus kiekvienoje sankryžoje?*

Kadangi kiekvienas žmogus bus nuėjęs N atkarpų, tai aišku, kad visi žmonės bus taškuose B_k su koordinatėmis $(k, N-k)$; k čia įgyja reikšmes 0, 1, ..., N. Visi tie taškai yra tiesėje, einančioje per taškus $B_0(0, N)$ ir $B_N(N, 0)$ (žr. 29 paveikslą).

Dabar mums reikia sužinoti, kiek žmonių atvyks į tašką $B_k(k, N-k)$. Tuo tikslu visus kelius, einančius iš A (0, 0) į taškus $B_k(k, N-k)$, $k=0, 1, \ldots, N$, užšifruokime nuliais ir vienetais. Gausime visas N-nares sekas, sudarytas iš nulių ir vienetų. Tokių sekų skaičius, kaip žinome, lygus 2^N, t. y. jų yra tiek, kiek žmonių išėjo iš taško A. Vadinasi, kiekvienu keliu eis tik po vieną žmogų. Todėl į kiekvieną tašką $B_k(k, N-k)$ atvyks tiek

žmonių, kiek trumpiausių kelių eina į tą tašką iš taško A. Tokių trumpiausių kelių skaičių mes jau žinome. Jis lygus

$$P(k,\ N-k)=C_N^k=\frac{N!}{k!\,(N-k)!}.$$

Vadinasi, į tašką $B_k(k,\ N-k)$ ateis $\frac{N!}{k!\,(N-k)!}$ žmonių. Tas skaičius lygus aritmetinio trikampio N-tosios eilutės k-tajam skaičiui.

Brauno judėjimas

Ką tik išspręstajam uždaviniui galima suteikti kitą formą, iš esmės ekvivalenčią pirmajai.

Iš tiesės Ox taško O išeina 2^N žmonių. Pusė jų eina į kairę, pusė — į dešinę. Po valandos abi grupės skyla pusiau. Viena pusė eina į dešinę, o kita į kairę. Šitaip grupės skaidosi kas valandą. Kiek žmonių ateis į kiekvieną tašką po N valandų nuo išėjimo iš taško O?

Tarsime, kad per vieną valandą kiekvienas tų žmonių nueina pusę kelio vieneto. Samprotaudami visiškai panašiai, kaip ir spręsdami ankstesnį uždavinį, gauname tokį rezultatą: po N valandų išėjusieji pasivaikščioti atsidurs taškuose $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ N$ (taškas O — atskaitos pradžia). Be to, į tašką B_k ateis $C_N^k=\frac{N!}{k!\,(N-k)!}$ žmonių.

Sunku patikėti, kad žmonės vaikščiotų taip, kaip ką tik pasakojome (beje, liaudiškame to uždavinio variante sakoma, kad taške O buvusi smuklė...). Vis dėlto kai kuriuose fizikos uždaviniuose tokie klaidžiojimai vyksta iš tikrųjų. Būtent, toks klaidžiojimas yra paprasčiausias modelis Brauno judėjimo, — dalelių, veikiamų molekulių smūgių, judėjimo.

Nagrinėsime daleles, kurios gali judėti tik tiese. Kadangi molekulių smūgiai yra atsitiktinio pobūdžio, tai per laiko vienetą pusė dalelių pasislinks per $\frac{1}{2}$ ilgio vieneto į dešinę, o pusė — į kairę (iš tikrųjų procesas yra žymiai sudėtingesnis, todėl gali būti poslinkių įvairiais atstumais). Vadinasi, jei iš pradžių taške O yra 2^N dalelių, tai jos slankios maždaug taip, kaip buvo pasakyta uždavinyje. Toks dalelių sklidimas fizikoje vadinamas *difuzija*. Išspręstasis uždavinys apie atsitiktinį žmonių minios klaidžiojimą padeda išsiaiškinti, kaip pasiskirsto dalelės per tam tikrą laiką nuo difuzijos pradžios. Po N laiko vienetų dalelės pasiskirstys pagal tokį dėsnį: taške $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$ atsidurs $C_N^k=\frac{N!}{k!\,(N-k)!}$ dalelių.

Kaip jau sakėme, skaičiai C_N^k yra aritmetinio trikampio N-tosios eilutės elementai. Kai difuzija yra kitokio pobūdžio, gauname m-skaičio aritmetinio trikampio N-tosios eilutės skaičius. Tarkime, kad iš pradžių taške O buvo m^N dalelių. Jas suskirstė į m vienodų grupių, tiesėje Ox pasirinko m taškų, išdėstytų simetriškai taško O atžvilgiu (atstumai tarp gretimų taškų lygūs 1), ir kiekviename taške padėjo po vieną dalelių grupę. Paskui kiekvieną grupę dalijo tokiu pat būdu dar kartą (kai dalijama-

grupė, esanti taške B, taškai, kuriuose atsiduria dalelės, yra išdėstyti simetriškai taško B atžvilgiu). Po N etapų dalelės bus taškuose B_k, kurių koordinatės lygios $k-\frac{m-1}{2}N$, $k=0, 1, \ldots, (m-1)N$. Be to, taške B_k bus $C_m(N, k)$ dalelių.

Kai N – didelis skaičius, labai sunku apskaičiuoti, kiek dalelių yra kiekviename taške. Bet, kaip dažnai atsitinka matematikoje, didėjant skaičiams, pasiskirstymo dėsnis pradeda artėti prie paprasto ribinio dėsnio, kuris tuo geriau apibūdina dalelių pasiskirstymą, kuo didesnis dalelių skaičius ir kuo sudėtingesnis tikslusis dėsnis.

Tikimybių teorijoje įrodoma: jei N reikšmės labai didelės, tai intervale $\left[x-\frac{a}{2}, x+\frac{a}{2}\right]$ atsiduria maždaug

$$\frac{12am^N}{\sqrt{2\pi N(m^2-1)}}\exp\left(-\frac{72x^2}{N^2(m^2-1)^2}\right)^*$$

dalelių (čia a – mažas skaičius, palyginus su N). Tą teiginį galima paaiškinti šitaip. Nubraižykime laiptinę liniją, kurios aukštis taške $B_k\left(k-\frac{m-1}{2}N\right)$ lygus $C_m(N,k)$. Visas gautosios laužtės abscises sumažinkime $\frac{N(m^2-1)}{12}$ kartų, o visas ordinates – $\frac{12am^N}{N(m^2-1)}$ kartų. Tada (jei N – didelis skaičius) gausime laiptinę liniją, kuri labai mažai skirsis nuo funkcijos

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

grafiko.

Šitą funkciją pirmasis pradėjo vartoti tikimybių teorijoje didysis vokiečių matematikas K. Gausas. Todėl ji vadinama *Gauso funkcija*. Ji vaidina svarbų vaidmenį ne tik dujų difuzijos klausimuose, bet ir šilumos laidumo teorijoje, paklaidų teorijoje ir t. t.

Pas Šemachanos karalienę

Vėl grįšime prie žmonių minios, klaidžiojančios ašyje Ox. Tik dabar tarsime, kad iš kairės nuo taško O, iš kurio jie išėjo, tęsiasi ... Šemachanos karalienės valdos, tos karalienės, kuri taip liūdnai nulėmė nelaimingojo karaliaus Dodono ir jo sūnų likimą. Skaitytojas turbūt prisimena, kad tie, kurie patekdavo į jos karalystę, iš ten nebegrįždavo. Mes irgi galvosime, kad tas, kas patenka į kairiąją ašies dalį, ten ir pasilieka. Reikia sužinoti, kiek žmonių atsidurs Šemachanos karalystėje ir kur bus kiti žmonės po N valandų nuo išėjimo iš taško O.

Pasirodo, tas uždavinys yra analogiškas mūsų anksčiau išnagrinėtam uždaviniui, kuriame buvo kalbama apie eilę prie kino teatro kasos. Norėdami tuo įsitikinti, ištirkime kokio nors žmogaus, išėjusio iš taško O, judėjimą. Tą judėjimą galima pavaizduoti skaičių 1 ir -1 seka: kiekvieną poslinkį į dešinę atitinka skaičius 1, o į kairę — skaičius -1. Jei toje seko-

---

* Simboliu exp x žymime e^x.

je yra k vienetų, tai žmogus k kartų paeina į dešinę ir $N-k$ kartų — į kairę. Galų gale jis atsidurs taške $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$*, jeigu tik pakeliui nepateks į Šemachanos karalystę. O į tą karalystę jis patektų, kuriuo nors momentu pasislinkęs į kairę daugiau, negu į dešinę.

Jei vietoj poslinkių kairėn ir dešinėn stebėtume žmones su pusrubliais ir rubliais, tai galėtume įsitikinti, kad patekimas pas Šemachanos karalienę atitinka eilės sustabdymą prie kasos. Vadinasi, skaičius žmonių, patekusių į tašką $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$, yra lygus skaičiui atvejų, kai eilė, kurioje stovi k žmonių su pusrubliais ir $N-k$ žmonių su rubliais, netrukdoma praeina pro kasą. Jau žinome, kad tas skaičius nelygus nuliui tik tada, kai $k \geqslant N-k$. Kai ši sąlyga išpildyta, tas skaičius lygus (žr. p. 60):

$$A(N-k,\ k)=C_N^{N-k}-C_N^{N-k-1}=\frac{N!\,(2k-N+1)}{(N-k)!\,(k+1)!}.$$

Vadinasi, po N valandų iš 2^N žmonių, išėjusių iš taško O, į tašką $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$, jei $2k \geqslant N$, ateis $C_N^{N-k}-C_N^{N-k-1}$ žmonių. Dabar jau nesunku sužinoti, kiek žmonių pateks į Šemachanos karalystę. Iš pradžių sudėkime skaičius $C_N^{N-k}-C_N^{N-k-1}$, keisdami k nuo $E\left(\frac{N}{2}\right)+1$** iki N. Šitaip sužinosime, kad į Šemachanos karalystę nepateko $C_N^{N-E\left(\frac{N}{2}\right)-1}$ žmonių. Kadangi iš taško O išėjo 2^N žmonių, tai į Šemachanos karalienės valdas pakliuvo $2^N-C_N^{N-E\left(\frac{N}{2}\right)-1}$ žmonių.

Jei Šemachanos karalystė prasidėtų ne prie pat taško O, bet į kairę nuo taško O_1 $\left(\text{su abscise} -\frac{q}{2}\right)$, tai gautume kiek kitokį rezultatą. Paaiškėtų, kad taškuose $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$, $k \geqslant \frac{N-q}{2}$, yra $C_N^{N-k}-C_N^{N-k-q-1}$ žmonių, o likusieji pakliuvę į Šemachanos karalienės valdas. Tai iš karto matyti iš 61 puslapyje spręsto uždavinio rezultatų.

Absorbuojanti sienelė

Mes jau sakėme, kad atsitiktinio klaidžiojimo uždaviniai labai svarbūs fizikai: jie yra paprasčiausi dalelių difuzijos modeliai. Šemachanos karalienės uždavinys irgi turi paprastą fizikinę interpretaciją — į kairę nuo taško O yra sienelė, pagaminta iš daleles absorbuojančios medžiagos. Jei sienelė yra prie pat taško O, tai turime atvejį, išnagrinėtą praeito skyrelio pradžioje. Jei ji nuo taško O yra nutolusi $\frac{q}{2}$ vienetų atstumu, tai turime uždavinį, išspręstą praeito skyrelio pabaigoje.

---

* Primename, kad kiekvieną kartą žmogus pajuda per $\frac{1}{2}$ ilgio vieneto.

** Žr. išnašą p. 65.

Tais laikais, kai kombinatorika ir tikimybių teorija dažniausiai būdavo taikomos azartiniams lošimams tirti, atsitiktinio klaidžiojimo su absorbcija uždavinys buvo formuluojamas kitaip. Tada būdavo kalbama apie „lošimą iki bankroto“. Įsivaizduokime du lošėjus, žaidžiančius, pavyzdžiui, „herbą ar raštą“. Po kiekvienos partijos pralošęs asmuo moka išlošusiajam vieną rublį. Reikėjo ištirti, kokią tikimybę turi įvairios lošimo baigtys, kai pradžioje vienas lošėjas turi p rublių, o kitas — q rublių. Lengva pastebėti, kad tas uždavinys yra susijęs su dalelių difuzija srityje, iš dviejų pusių apribotoje absorbuojančiomis sienelėmis.

Klaidžiojimas begalinėje plokštumoje

Iki šiol mes nagrinėjome, arba kaip klaidžioja bokštas, galintis judėti tik aukštyn ir dešinėn, arba kaip klaidžioja taškas begalinėje tiesėje (iš esmės abu tie klausimai yra ekvivalentūs). Dabar tirsime atvejį, kai bokštas gali judėti begalinėje šachmatų lentoje visomis kryptimis. Kitaip sakant, spręsime tokį uždavinį:

Šachmatų bokštas iš pradžių stovi begalinės visomis kryptimis šachmatų lentos langelyje O (0, 0). *Keliais būdais jis gali patekti į langelį $A(p, q)$ per N ėjimų* (tariame, kad vienu ėjimu bokštas perkeliamas į gretimą langelį)?

Atsižvelgus į lentos simetriškumą, pakanka tirti atvejį, kai $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. Jei bokštas eitų trumpiausiu keliu, tai langelį $A(p, q)$ jis pasiektų po $p+q$ ėjimų. Todėl turi būti tenkinama nelygybė $N \geqslant p+q$. Kelias iš N ėjimų skiriasi nuo trumpiausio kelio tuo, kad bokštas daro keletą vienas kitą panaikinančių ėjimų. Savaime aišku, kad tokių ėjimų skaičius yra lyginis. Tą skaičių pažymėkime $2k$. Kadangi dar yra p nepanaikinamų ėjimų dešinėn ir q nepanaikinamų ėjimų aukštyn, tai $p+q+2k=N$.

Sakykime, kad X — ėjimų k a i r ė n ir ž e m y n aibė, o Y — ėjimų d e š i n ė n ir ž e m y n aibė. Žinodami aibes X ir Y, galime nusakyti visą bokšto kelią: ėjimai, priklausą abiem aibėms, yra ėjimai žemyn; ėjimai, priklausą aibei X, bet nepriklausą aibei Y, yra ėjimai kairėn; ėjimai, priklausą aibei Y, bet nepriklausą aibei X, yra ėjimai dešinėn. Pagaliau tie ėjimai, kurie nepriklauso nei aibei X, nei aibei Y, yra ėjimai aukštyn.

Vadinasi, norėdami, sužinoti kiek kelių veda į tašką $A(p; q)$, turime apskaičiuoti, keliais būdais galima pasirinkti aibes X ir Y. Kadangi kiekvieną ėjimą žemyn arba kairėn atitinka jį panaikinantis ėjimas, tai aibei X priklauso k elementų. Kiekvieną ėjimą kairėn (priklausantį aibei X) atitinka jį panaikinąs ėjimas dešinėn (priklausąs aibei Y). Kadangi aibei Y priklauso p ėjimų dešinėn, nepanaikinamų ėjimais kairėn, tai aibėje Y yra $p+k$ elementų. Todėl yra C_N^k būdų pasirinkti aibę X ir C_N^{p+k} būdų pasirinkti aibę Y. Pagal dauginimo taisyklę yra $C_N^k C_N^{p+k}$ būdų pasirinkti aibes X ir Y. Vadinasi, skaičius kelių, vedančių iš taško $O(0; 0)$ į tašką $A(p; q)$ ir susidedančių iš N ėjimų, lygus

$$T = C_N^k C_N^{p+k}.$$

Bendrasis bokštų uždavinys

Pradėsime nagrinėti naują kombinatorikos uždavinių ciklą, susijusį su šachmatų lenta. Sprendžiant tuos uždavinius, skaičiuojama, kiek yra būdų pastatyti dvi šachmatų figūras (karalius, valdoves ir pan.), kad viena figūra galėtų kirsti kitą. Aišku, kad tada lengva apskaičiuoti, kiek yra tokių padėčių, kad viena figūra negali kirsti kitos: juk visų galimų padėčių skaičius iš karto randamas pagal gretinių formulę.

Kai kuriuos tokio tipo uždavinius jau sprendėme: 25 puslapyje nagrinėjome 8 bokštų uždavinį paprastoje šachmatų lentoje. Apibendrindami tą uždavinį, imame $m \times n$ langelių lentą, t. y. lentą, turinčią m horizontalių ir n vertikalių. Norime sužinoti, keliais būdais galima pastatyti k bokštų toje lentoje, kad jie negalėtų kirsti vienas kito.

Savaime aišku, kad šis uždavinys išsprendžiamas tik tada, kai $k \leqslant m$ ir $k \leqslant n$: priešingu atveju bent du bokštai turės stovėti vienoje horizontalėje arba vienoje vertikalėje. Sakykime, kad tas reikalavimas patenkintas. Tada bokštus išdėstyti galima dviem etapais. Iš pradžių pasirenkame horizontales, kuriose stovės bokštai. Kadangi horizontalių skaičius lygus m, o reikia pasirinkti k horizontalių, tai turime C_m^k horizontalių pasirinkimo variantų. Panašiai sužinome, kad yra C_n^k būdų pasirinkti vertikales kuriose stovės bokštai. Kadangi vertikalių rinkimasis nepriklauso nuo to, kaip pasirinkome horizontales, tai pagal dauginimo taisyklę turime $C_m^k C_n^k$ būdų pasirinkti linijas, kuriose stovės bokštai.

Tačiau tuo reikalas dar nesibaigia. Juk k horizontalių ir k vertikalių susikirsdamos sudaro k^2 langelių, o kiekvienoje lentoje, turinčioje k^2 langelių, yra $k!$ būdų pastatyti k bokštų taip, kad jie negalėtų kirsti vienas kito (žr. p. 25). Todėl visų galimų bokštų padėčių skaičius lygus

$$C_m^k C_n^k k! = \frac{n!\, m!}{k!\,(n-k)!\,(m-k)!}. \tag{13}$$

Pavyzdžiui, paprastoje šachmatų lentoje pastatyti 3 bokštus yra

$$\frac{8!\, 8!}{3!\, 5!\, 5!} = 18\,816$$

būdų.

Kai $k=m=n$, iš (13) formulės gauname atsakymą $n!$, kuris sutampa su tuo, kas buvo pasakyta 26 puslapyje.

Jei atsisakytume reikalavimo, kad bokštai negali kirsti vienas kito, tai atsakymas būtų kitoks: iš mn langelių turėtume pasirinkti k bet kokių langelių. Tai padaryti yra

$$C_{mn}^k = \frac{(mn)!}{k!\,(mn-k)!}$$

būdų. Jei turėtume k skirtingų bokštų, tai parašytuosius atsakymus dar reikėtų padauginti iš $k!$.

Pasunkinsime bokštų uždavinį, reikalaudami, kad bokštai, nekirsdami vienas kito, stovėtų lentoje simetriškai. Tokiu atveju atsiranda daug visokių uždavinių priklausomai nuo to, kokio tipo simetrijos siekiama.

Paprasčiausias uždavinys yra tada, kai reikalaujama bokštus sustatyti simetriškai lentos centro atžvilgiu. Tuo atveju, kai lentoje, turinčioje n horizontalių ir n vertikalių, reikia pastatyti n bokštų, uždavinio sprendinių skaičių žymėsime G_n. Įrodysime, kad

$$G_{2n} = 2n\,G_{2n-2}. \tag{14}$$

Sakykime, kad lentoje yra $2n$ horizontalių ir $2n$ vertikalių. Bokštas, statomas pirmoje vertikalėje, gali užimti bet kurį iš $2n$ pirmosios vertikalės langelių. Iš sąlygos matyti, kad tuo apibrėžiama padėtis bokšto, stovinčio paskutinėje vertikalėje: jis turi atsistoti simetriškai pirmajam bokštui lentos centro atžvilgiu. Išbraukime pirmąją ir paskutiniąją vertikales ir tas dvi horizontales, kurias užėmė pastatytieji bokštai (kadangi horizontalių skaičius lyginis, tai pašalinamieji bokštai negali stovėti vienoje horizontalėje). Tokiu būdu gauname lentą, sudarytą iš $2n-2$ horizontalių ir $2n-2$ vertikalių. Aišku, kad kiekvieną simetrišką bokštų dėstinį naujoje lentoje atitinka simetriškas bokštų dėstinys pradinėje lentoje. Iš to ir darome išvadą, kad $G_{2n} = 2nG_{2n-2}$ (dar kartą primename, kad pirmasis bokštas galėjo užimti bet kurį iš $2n$ pirmosios vertikalės langelių).

Remdamiesi (14) formule, įsitikiname, kad $G_{2n} = 2^n n!$.

Dabar imkime lentą, turinčią $2n+1$ horizontalių ir $2n+1$ vertikalių. Tokiu atveju centrinis lentos langelis neturi simetriško langelio. Jame būtinai turi stovėti bokštas*. Išbraukę centrinę vertikalę ir centrinę horizontalę, gauname lentą, turinčią $2n$ horizontalių ir $2n$ vertikalių, kurioje reikia simetriškai pastatyti $2n$ bokštų. Vadinasi, gauname lygybę

$$G_{2n+1} = G_{2n} = 2^n n!\,. \tag{15}$$

Toliau nagrinėsime šiek tiek sunkesnį uždavinį, kuriame tiriami bokštų dėstiniai, nesikeičiantys, pasukus lentą 90° kampu (vieną tokį dėstinį 8×8 lentoje matome 30 paveiksle). Sakykime, kad lenta turi $4n$ vertikalių ir $4n$ horizontalių, o bokštų skaičius irgi lygus $4n$. Tokiu atveju bokštas, stovįs pirmoje vertikalėje, gali užimti bet kurį langelį, išskyrus kampinius, t. y. bet kurį iš $4n-2$ langelių (kampiniame langelyje bokšto statyti negalima, nes, pasukę lentą 90° kampu, gautume du bokštus, kertančius vienas kitą). Tą bokštą atitinka dar trys bokštai, stovį paskutinėje horizontalėje, paskutinėje vertikalėje ir pirmoje horizontalėje (jie gaunami iš pirmojo bokšto 90°, 180° ir 270° posūkiais). Išbraukę horizontales ir vertikales, kuriose stovi tie keturi bokštai, gauname $(4n-4) \times (4n-4)$ lentą, kurioje tokia pat simetrija išdėstyti bokštai. Todėl, uždavinio sprendinių skaičių $n \times n$ lentoje pažymėję R_n, galime rašyti lygybę

$$R_{4n} = (4n-2)\,R_{4n-4}.$$

* Turima mintyje, kad lentoje statoma $2n+1$ bokštų. *Vertėjas*

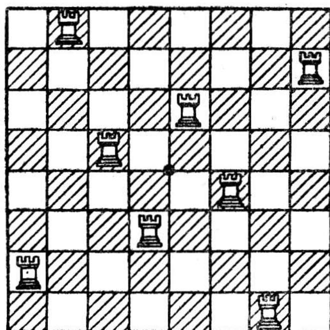
Iš čia matyti, kad

$$R_{4n} = 2^n (2n-1)(2n-3)\dots 1. \quad (16)$$

Kai lenta turi $4n+1$ vertikalių ir $4n+1$ horizontalių, uždavinio sprendinių skaičius yra toks pat, kaip ir $4n \times 4n$ lentoje: juk $(4n+1) \times (4n+1)$lentoje vienas bokštas būtinai stovi centre* ir todėl galima išbraukti centrinę horizontalę ir vertikalę. Vadinasi,

$$R_{4n+1} = R_{4n}. \quad (17)$$

Kai lenta turi $4n+2$ vertikalių ir $4n+2$ horizontalių arba $4n+3$ vertikalių ir $4n+3$ horizontalių, sprendinių skaičius lygus nuliui. Tuo įsitikiname, pastebėję, kad kiekvienas bokštas stovi arba lentos centre, arba šalia jo. Antruoju atveju bokštas priklauso kokiam nors ketvertui, kurį sudaro bokštai, sutampantys vienas su kitu, kai lentą pasukame $90°$ kampu. Todėl visų bokštų skaičius turi būti lygus arba $4n$ (kai lentoje nėra centrinio langelio), arba $4n+1$. Vadinasi, įrodėme, kad $R_{4n+2} = R_{4n+3} = 0$.



30 pav.

Baigdami skyrelį, apskaičiuokime, kiek yra būdų išdėstyti n bokštų taip, kad jie stovėtų simetriškai įstrižainės** atžvilgiu. To uždavinio sprendinių skaičių, kai lenta turi n vertikalių ir n horizontalių, žymėsime Q_n. Skaičiai Q_n yra susieti tokia lygybe:

$$Q_n = Q_{n-1} + (n-1) Q_{n-2}. \quad (18)$$

Tuo įsitikiname, pastebėję, kad pirmoje vertikalėje bokštas arba stovi kairiajame apatiniame kampe, arba nestovi. Pirmuoju atveju, išbraukę pirmąją vertikalę ir pirmąją horizontalę, gauname simetrišką $n-1$ bokštų dėstinį $(n-1) \times (n-1)$ lentoje. Tokių dėstinių skaičius lygus Q_{n-1}. Antruoju atveju yra kitas bokštas, simetriškas pirmajam įstrižainės atžvilgiu. Išbraukiame dvi vertikales ir dvi horizontales, kuriose stovi tuodu bokštai. Gauname simetrišką $n-2$ bokštų dėstinį $(n-2) \times (n-2)$ lentoje. Ka-

* Galvojama, kad kiekvienoje horizontalėje ir kiekvienoje vertikalėje turi stovėti po vieną bokštą. *Vertėjas*

** Kalbama apie įstrižainę, einančią per kairįjį apatinį langelį.

dangi tokių dėstinių skaičius lygus Q_{n-2}, o pirmoje vertikalėje bokštą galima statyti į $n-1$ langelių, tai gauname $(n-1)\,Q_{n-2}$ dėstinių. Iš to ir išplaukia (18) lygybė.

Galima įrodyti, kad

$$Q_n = 1 + C_n^2 + \frac{1}{1\cdot 2}\, C_n^2 C_{n-2}^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\, C_n^2 C_{n-2}^2 C_{n-4}^2 + \ldots \quad (19)$$

Šita lygybė gaunama, visus bokštų dėstinius suskirsčius į klases: kai bokštai, nestovį įstrižainėje, sudaro s porų, dėstinys priskiriamas s-tajai klasei.

Visiškai panašiai įrodomas toks teiginys: jei n bokštų statoma $n\times n$ lentoje taip, kad bokštai nekirstų vienas kito ir stovėtų simetriškai abiejų įstrižainių atžvilgiu, tai galimų dėstinių skaičius B_n tenkina lygybes

$$B_{2n} = 2B_{2n-2} + (2n-2)\, B_{2n-4}, \quad B_{2n+1} = B_{2n}.$$

Du žirgai

Keliais būdais galima pastatyti $m\times n$ lentoje du žirgus, baltą ir juodą, kad jie negalėtų kirsti vienas kito?

Spręsti šį uždavinį sunku, nes galimų žirgo ėjimų skaičius priklauso nuo langelio, kuriame stovi žirgas: jei $m\geqslant 5$ ir $n\geqslant 5$, tai iš lentos kampo yra tik du ėjimai, iš kai kurių kraštinių langelių — trys ėjimai, iš kitų kraštinių langelių — keturi ėjimai, o iš centrinių langelių — aštuoni ėjimai. Mat žirgas turi kelių skirtingų tipų ėjimus: jis gali žengti vieną žingsnį dešinėn ir du žingsnius aukštyn arba du žingsnius kairėn ir vieną žingsnį žemyn ir t. t. Žirgas turi iš viso 8 tipų ėjimus, kuriuos galima apibūdinti, nurodant, kiek žingsnių žengiama horizontaliąja kryptimi ir kiek vertikaliąja. Vadinasi, tie ėjimai apibūdinami taip: (2, 1), (1, 2), (−1, 2), (−2, 1), (−2, −1), (−1, −2), (1, −2), (2, −1).

Norint įveikti kilusias komplikacijas, reikia tarti, kad žirgas yra 8 figūrų junginys ir kad kiekviena figūra turi tik vieno tipo ėjimus. Pažiūrėsime, keliose vietose galima pastatyti lentoje žirgą (2, 1), kad jis kontroliuotų kokį nors langelį. Aišku, kad jis gali stovėti bet kurioje vertikalėje, išskyrus dvi paskutiniąsias, ir bet kurioje horizontalėje, išskyrus paskutiniąją. Vadinasi, pasirinkti vertikalę yra $n-2$ būdų, o horizontalę $m-1$ būdų; iš viso gauname $(m-1)\,(n-2)$ baltojo žirgo (2, 1) pastatymo būdų. Iš simetriškumo aišku, kad tiek pat būdų galima pastatyti kiekvieną baltąjį žirgą $(\pm 2, \pm 1)$ taip, kad jis galėtų kirsti atitinkamai pastatytą juodąjį žirgą. Kiekvieną baltąjį žirgą $(\pm 1, \pm 2)$ pastatyti yra $(m-2)$ $(n-1)$ būdų. Todėl skaičius visų būdų pastatyti du žirgus, kad jie galėtų kirsti vienas kitą, reiškiamas formule

$$4\Big((m-1)\,(n-2) + (m-2)\,(n-1)\Big) = 2\Big((2m-3)\,(2n-3) - 1\Big).$$

Jei statytume du vienaspalvius žirgus taip, kad jie galėtų ginti vienas kitą, tai gautume perpus mažiau galimų variantų (būtų galima sukeisti

žirgus vietomis). O skaičius būdų pastatyti du įvairiaspalvius žirgus taip, kad jie negalėtų kirsti vienas kito, lygus

$$m^2n^2-9mn+12m+12n-16.$$

(Du žirgus pastatyti $m\times n$ lentoje yra $mn(mn-1)$budų.)

Šachmatų uždavinių sudarinėtojai kartais naudoja „ pasakiškas" figūras, kurių ėjimai skiriasi nuo paprastų figūrų ėjimų. Sukursime ir mes naują figūrą, kurią vadinsime žirgų (p, q), $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$. Tos figūros ėjimą sudaro p žingsnių horizontalia kryptimi ir q žingsnių vertikalia kryptimi. Pavyzdžiui, paprastas žirgas yra žirgu (1, 2) ir (2, 1) junginys.

Samprotaudami panašiai, kaip ir anksčiau, gauname tokią išvadą: jei $0<p\leqslant n, 0<q\leqslant m$, tai yra $4(n-p)(m-q)$ būdų pastatyti du įvairiaspalvius žirgus (p,q) taip, kad jie galėtų kirsti vienas kitą. Kai p arba q lygus nuliui, tai variantų skaičius sumažėja perpus. Variantų skaičius sumažėja perpus ir tuo atveju, kai žirgai yra vienodos spalvos.

Visas šachmatų figūras galima laikyti kelių žirgų (p, q) su įvairiomis p ir q reikšmėmis junginiais. Pavyzdžiui, šachmatų karalius yra žirgų (0, 1), (1, 0) ir (1, 1) junginys. Todėl du skirtingos spalvos šachmatų karalius pastatyti $m\times n$ lentoje taip, kad jie galėtų kirsti vienas kitą, yra

$$2\Big(n(m-1)+(n-1)m+2(n-1)(m-1)\Big)=8mn-6m-6n+4$$

būdų. Vadinasi, pastatyti juos taip, kad jie nekirstų vienas kito, yra $m^2n^2-9mn+6m+6n-4$ būdų.

Šachmatų rikis yra žirgų $(1,1), (2,2), \ldots, (p, p)$ junginys; p — mažesnysis iš skaičių $m-1$ ir $n-1$. Siekdami konkretumo, tarkime, kad $m\leqslant n$, Tada $p=m-1$, ir pastatyti du skirtingos spalvos rikius taip, kad jie kirstų vienas kitą, yra

$$4\Big((n-1)(m-1)+(n-2)(m-2)+\ldots+(n-m+1)\cdot 1\Big)$$

būdų. Atlikę nurodytuosius veiksmus ir pasinaudoję natūrinių skaičių nuo 1 iki $m-1$ sumos bei tų skaičių kvadratų sumos formulėmis, įsitikiname, kad visų variantų skaičių galima išreikšti šitaip: $\frac{2}{3}m(m-1)(3n-m-1)$. Kai $m\geqslant n$, reikia sukeisti vietomis m ir n. Atskiru atveju, kai $m=n$, gauname $\frac{2}{3}m(m-1)(2m-1)$ variantų.

Bokštų dėstinių skaičių galima apskaičiuoti paprasčiau. Lentoje yra mn langelių, ir bet kuriame langelyje gali stovėti baltasis bokštas. Pastatytasis bokštas kontroliuoja $m+n-2$ langelių, kurių kiekvieną gali užimti juodasis bokštas. Todėl iš viso yra $mn(m+n-2)$ padėčių, kuriose vienas bokštas kerta kitą.

Kadangi valdovę galima laikyti bokšto ir rikio junginiu, tai $m \times n$ lentoje, kai $m \leqslant n$, pastatyti dvi valdoves taip, kad jos kirstų viena kitą, yra

$$\frac{2}{3} m(m-1)(3n-m-1)+mn(m+n-2)$$

būdų. Kai $m=n$, iš šito reiškinio gauname $\frac{2}{3} m(m-1)(5m-1)$. Siūlome skaitytojui apskaičiuoti, kiek yra būdų pastatyti tas figūras taip, kad jos negalėtų kirsti viena kitos.

VI SKYRIUS

REKURENTINIAI SĄRYŠIAI

Spręsdami kai kuriuos kombinatorikos uždavinius, jau taikėme tokį metodą: tiriamąjį uždavinį pakeisdavome uždaviniu su mažesniu objektų skaičiumi. Taip išvedėme, pavyzdžiui, formulę gretinių su pasikartojimais skaičiui rasti (p. 8), o IV skyriuje sprendėme beveik visus skirstinių uždavinius. Keitimo analogišku uždaviniu su mažesniu objektų skaičiumi metodas vadinamas *rekurentinių sąryšių metodu* (lot. *recurrere* — grįžti). Naudodamiesi rekurentiniu sąryšiu, uždavinį su n objektų galime pakeisti uždaviniu su $n-1$ objektu, o šį — uždaviniu su $n-2$ objektais ir t. t. Paeiliui mažindami objektų skaičių, galų gale gauname uždavinį, kurį lengva išspręsti. Labai dažnai iš rekurentinio sąryšio pavyksta išvesti formulę kombinatorikos uždaviniui spręsti.

Pavyzdžiui, II skyriuje (žr. p. 25), remdamiesi gretinių be pasikartojimų skaičiaus formule, išvedėme formulę $P_n = n!$ kėlinių iš n elementų skaičiui rasti. Tačiau tą formulę galima išvesti ir kitaip, iš pradžių sudarant rekurentinį saryšį, kurį tenkina skaičiai P_n.

Sakykime, turime n daiktų $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Bet kurį jų kėlinį galima sudaryti šitaip: imame kokį nors kėlinį, sudarytą iš elementų $a_1, \ldots, a_{n-1}$, ir prie jo prijungiame elementą a_n. Savaime aišku, kad elementas a_n gali užimti įvairias vietas. Jį galima pastatyti pačioje pradžioje, įterpti tarp pirmojo ir antrojo kėlinio elementų, tarp antrojo ir trečiojo, o galima pastatyti ir pačiame kėlinio gale. Skirtingų vietų, kurias gali užimti elementas a_n, skaičius lygus n; todėl iš kiekvieno elementų $a_1, \ldots, a_{n-1}$ kėlinio gauname n kėlinių iš elementų $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Tai reiškia, kad kėlinių iš n elementų yra n kartų daugiau, negu kėlinių iš $n-1$ elementų. Tokiu būdu sudarėme rekurentinį sąryšį

$$P_n = nP_{n-1}.$$

Remdamiesi parašytuoju sąryšiu, paeiliui gauname

$$P_n = nP_{n-1} = n(n-1)P_{n-2} = \ldots = n(n-1)\ldots 2P_1.$$

Kadangi iš vieno elemento galima sudaryti tik vieną kėlinį, tai $P_1 = 1$. Todėl

$$P_n = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!.$$

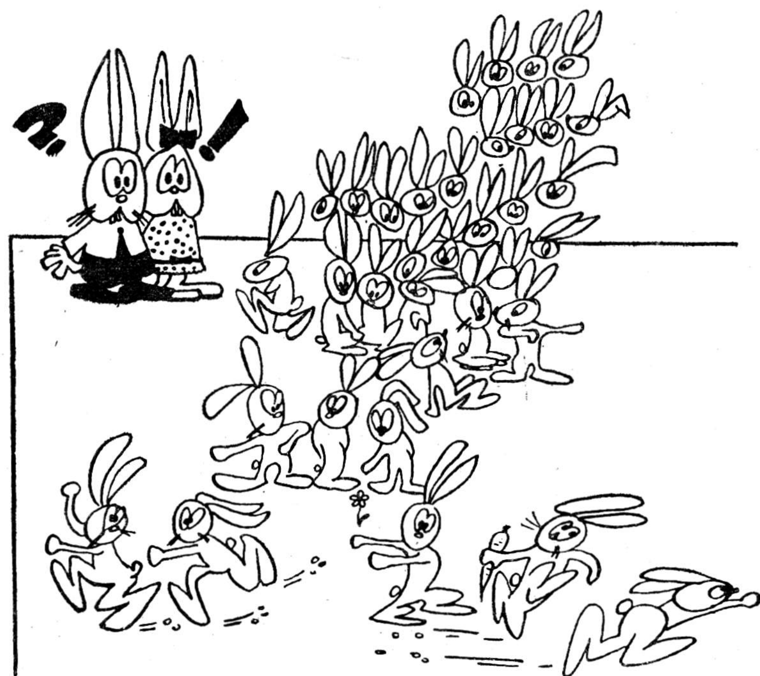
Vadinasi, vėl gavome formulę $P_n = n!$.

Daug rekurentinių sąryšių aptikome, spręsdami skirstinių uždavinius, figūrų išdėstymo šachmatų lentoje uždavinius ir t. t. Šiame skyriuje pirma išnagrinėsime dar kelis tokius uždavinius, o skyriaus pabaigoje susipažinsime su bendrąja rekurentinių sąryšių teorija.

Fibonačio skaičiai

1202 metais pasirodžiusioje knygoje „Liber abaci" italų matematikas Fibonačis tarp kitų uždavinių pateikė tokį uždavinį:

Iš triušių poros kas mėnesį gaunamas dviejų triušiukų (patinėlio ir patelės) prieauglis, o iš atvestųjų triušiukų po dviejų mėnesių jau gaunamas naujas prieauglis. Kiek triušių turėsime po metų, jei metų pradžioje turėjome vieną triušių porą?



Iš uždavinio sąlygos matyti, kad po pirmojo mėnesio turėsime dvi triušių poras. Po antrojo mėnesio prieauglį duos tik pirmoji pora, todėl turėsime tris poras, o dar po mėnesio prieauglį duos ir pradinė pora, ir pora, atvesta prieš du mėnesius. Todėl iš viso bus 5 poros.

Simboliu $F(n)$ pažymėkime skaičių porų, kurias turėsime po n mėnesių, skaitant nuo metų pradžios. Matome, kad $(n+1)$-ojo mėnesio pabaigoje turėsime $F(n)$ buvusių porų ir dar tiek naujų porų, kiek jų buvo $(n-1)$-ojo

mėnesio pabaigoje, t. y. dar $F(n-1)$ porų. Kitaip sakant, gauname tokį rekurentinį sąryšį:

$$F(n+1)=F(n)+F(n-1). \qquad (1)$$

Kadangi iš sąlygos matyti, jog $F(0)=1$, $F(1)=2$, tai paeiliui įsitikiname, kad

$$F(2)=3, \quad F(3)=5, \quad F(4)=8$$

ir t. t. Kaip atskirą atvejį gauname ir atsakymą į uždavinio klausimą: $F(12)=377$.

Skaičiai $F(n)$ vadinami *Fibonačio skaičiais*. Jie turi labai daug įdomių savybių. Tuoj pat juos išreikšime skaičiais C_m^k. Tuo tikslu Fibonačio skaičius susiesime su šitokiu kombinatorikos uždaviniu:

Reikia sužinoti, kiek yra n-narių sekų, sudarytų iš nulių ir vienetų, kuriose nėra dviejų greta parašytų vienetų.

Imkime bet kurią tokią seką ir priskirkime jai triušių porą pagal šitokią taisyklę: vienetus atitinka numeriai mėnesių, kurių pabaigoje gimė viena tos poros „protėvių" pora (įskaitant ir pradinę), o nulius — visų kitų mėnesių numeriai. Pavyzdžiui, seka 010010100010 reiškia tokią „genealogiją": pati pora gimė 11-ojo mėnesio pabaigoje, jos tėvai — 7-ojo mėnesio pabaigoje, „seneliai" — 5-ojo mėnesio pabaigoje, o „proseneliai" — antrojo mėnesio pabaigoje. Pradinę triušių porą reikšime seka 000000000000.

Savaime aišku, kad tokiu būdu negausime sekos, kurioje du vienetai stovėtų greta: iš sąlygos matyti, kad gimusi pora po mėnesio dar neduoda prieauglio. Be to, pagal nurodytąją taisyklę skirtingas sekas atitinka skirtingos triušių poros ir atvirkščiai: dvi skirtingos triušių poros turi skirtingą „genealogiją", nes pagal sąlygą triušienė per mėnesį gali atvesti tik vieną triušiukų porą.

Iš aprašytojo sąryšio matyti, kad minėtojo tipo sekų skaičius lygus $F(n)$.

Dabar tarkime, kad $p=\frac{n+1}{2}$, kai n — nelyginis skaičius, ir $p=\frac{n}{2}$, kai n — lyginis skaičius, ir įsitikinkime, kad

$$F(n)=C_{n+1}^0+C_n^1+C_{n-1}^2+\ldots+C_{n-p+1}^p. \qquad (2)$$

Galima sakyti, kad p yra skaičiaus $\frac{n+1}{2}$ sveikoji dalis (toliau skaičiaus α sveikąją dalį žymėsime simboliu $[\alpha]$; vadinasi, $p=\left[\frac{n+1}{2}\right]$).

Norėdami įsitikinti, kad (2) lygybė teisinga, prisimename, kad $F(n)$ — skaičius visų n-narių sekų iš nulių ir vienetų, kuriose nėra dviejų greta stovinčių vienetų. Jei imsime šio tipo sekas, sudarytas iš k vienetų ir $n-k$ nulių, tai jų skaičius bus lygus C_{n-k+1}^k (žr. p. 47). Kadangi šiuo atveju k turi tenkinti nelygybę $k\leqslant n-k+1$, tai jis gali kisti nuo 0 iki $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Taikydami sumavimo taisyklę, gauname (2) lygybę.

Kad (2) lygybė yra teisinga, galima įrodyti ir kitaip. Sakykime, kad

$$G(n) = C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-p+1}^p,$$

o $p = \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Tada, remdamiesi lygybe $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, lengvai gauname sąryšį

$$G(n) = G(n-1) + G(n-2). \tag{3}$$

Be to, aišku, kad $G(1) = 2 = F(1)$ ir $G(2) = 3 = F(2)$. Kadangi sekos $F(n)$ ir $G(n)$ tenkina tą patį rekurentinį sąryšį $X(n) = X(n-1) + X(n-2)$, tai

$$G(3) = G(2) + G(1) = F(2) + F(1) = F(3)$$

ir apskritai $G(n) = F(n)$.

Kitas įrodymo metodas

Praeitame skyrelyje Fibonačio uždavinį betarpiškai susiejome su kombinatorikos uždaviniu. Tą sąsają galėjome išvesti ir kitaip, betarpiškai įrodydami, kad kombinatorikos uždavinio sprendinių skaičius $T(n)$ tenkina tą patį rekurentinį sąryšį

$$T(n+1) = T(n) + T(n-1), \tag{4}$$

kaip ir Fibonačio skaičiai.

Iš tikrųjų, imkime bet kurią $(n+1)$-narę nulių ir vienetų seką, tenkinančią sąlygą: du vienetai niekur joje nestovi greta. Tokios sekos paskutinis skaitmuo gali būti arba 0, arba 1. Jei paskutinis skaitmuo yra 0, tai, jį išbraukę, gausime n-narę seką, tenkinančią tą pačią sąlygą. Atvirkščiai, pasirinkus bet kurią n-narę nulių ir vienetų seką, kurioje niekur nėra dviejų greta stovinčių vienetų, ir prie jos prirašius nulį, gaunama $(n+1)$-narė seka, turinti tą pačią savybę. Iš to aišku, kad „gerų" $(n+1)$-narių sekų, kurios baigiasi nuliu, skaičius lygus $T(n)$.

Dabar sakykime, kad sekos paskutinis skaitmuo yra 1. Kadangi negali būti dviejų greta parašytų vienetų, tai prieš tą vienetą stovi nulis. Kitaip sakant, seka baigiasi skaitmenimis 01. Išbraukus paskutinį 1 ir priešpaskutinį 0, gali likti bet kokia $(n-1)$-narė seka, tik joje negali būti dviejų greta parašytų vienetų. Todėl skaičius „gerų" $(n+1)$-narių sekų, kurios baigiasi vienetu, lygus $T(n-1)$. Kadangi kiekviena seka baigiasi arba nuliu, arba vienetu, tai, remdamiesi sumavimo taisykle, gauname lygybę $T(n+1) = T(n) + T(n-1)$.

Vadinasi, gavome tą patį rekurentinį sąryšį. Iš to dar neaišku, ar skaičiai $T(n)$ ir $F(n)$ sutampa. Juk, pavyzdžiui, ir faktorialai, ir subfaktorialai tenkina rekurentinį sąryšį

$$X(n+1) = n[X(n) + X(n-1)], \tag{5}$$

bet faktorialų sekos pirmieji nariai lygūs $0! = 1$, $1! = 1$, o subfaktorialų — $D(0) = 1$, $D(1) = 0$. Todėl jų tretieji, ketvirtieji ir visi kiti nariai yra skirtingi.

Norint įrodyti, kad skaičiai $T(n)$ ir $F(n)$ sutampa, reikia dar įsitikinti, kad $T(1)=F(1)$ ir $T(2)=F(2)$ — tada iš rekurentinio sąryšio gausime: $T(3)=F(3)$, $T(4)=F(4)$ ir t. t. Yra dvi vienanarės sekos, tenkinančios nurodytąją sąlygą: 0 ir 1, ir trys dvinarės sekos: 00, 01 ir 10. Todėl $T(1)=2=F(1)$ ir $T(2)=3=F(2)$. Teiginys įrodytas.

Nuoseklaus skirstymo procesas

Kombinatorikos uždaviniams spręsti dažnai taikomas metodas, kurį taikėme praeitame skyrelyje. Iš sprendžiamojo uždavinio sąlygos išvedamas rekurentinis sąryšis, ir įsitikinama, kad jis sutampa su kito, jau išspręsto, uždavinio rekurentiniu sąryšiu. Jei tokiu atveju sutampa ir sekų pirmieji nariai (vėliau išsiaiškinsime, kiek narių turi sutapti), tai abu uždaviniai turi vienodus sprendinius.

Aprašytąjį metodą pritaikysime vienam uždaviniui spręsti. Sakykime, turime kokią nors aibę, sudarytą iš n elementų, sustatytų tam tikra tvarka. Tą aibę suskirstysime į dvi netuščias dalis taip, kad pirmoji dalis būtų kairėje, o antroji — dešinėje (t. y. pirmoji dalis yra sudaryta, pavyzdžiui, iš elementų nuo pirmojo iki m-tojo imtinai, o antroji — iš elementų nuo $(m+1)$-ojo iki n-tojo imtinai). Paskui kiekvieną dalį tokiu pat būdu vėl suskirstysime į dvi netuščias dalis (jei kurioje nors dalyje tėra vienas objektas, tai tos dalies nebeskirstysime). Procesą baigsime, kai visos gautosios dalys turės tik po vieną objektą. *Kiek yra tokių skirstymo procesų, jei du procesai laikomi skirtingais, kai nors viename etape gaunami skirtingi rezultatai?*

Aibės, sudarytos iš $n+1$ elementų, skirstymo būdų skaičių žymėsime simboliu B_n. Pirmajame etape yra n tos aibės suskirstymo būdų (pirmojoje dalyje gali būti vienas objektas, du objektai, ..., n objektų). Todėl visų skirstymo procesų aibė suskyla į n klasių: į s-tąją klasę patenka visi tie procesai, kurių pirmame etape gauta pirmoji dalis yra sudaryta iš s objektų.

Apskaičiuosime, kiek procesų priklauso s-tajai klasei. Kadangi pirmojoje dalyje yra s elementų, tai, skirstydami ją toliau, gauname B_{s-1} skirtingų procesų. Antroji dalis turi $n-s+1$ elementų, todėl jai toliau skirstyti yra B_{n-s} procesų. Remdamiesi dauginimo taisykle, įsitikiname, kad s-tajai klasei priklauso $B_{s-1}B_{n-s}$ skirtingų procesų. Pagal sumavimo taisyklę iš to darome išvadą, kad

$$B_n=B_0 B_{n-1}+B_1 B_{n-2}+\ldots+B_{n-1} B_0. \qquad (6)$$

Gavome skaičių B_n rekurentinį sąryšį. Su juo jau buvome susidūrę, spręsdami eilės prie kino teatro kasos uždavinį (žr. p. 64). Ten įsitikinome, kad tą sąryšį tenkina skaičiai

$$T_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n.$$

Norint įrodyti, kad lygybė

$$B_n=T_n=\frac{1}{n+1}C_{2}^{n} \qquad (7)$$

yra teisinga, mums dar reikia įsitikinti, kad sekų $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ ir $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ pirmieji nariai T_0 ir B_0 sutampa.

Lengva pastebėti, kad $T_0 = C_0^0 = 1$. Kita vertus, $B_0 = 1$, nes vieno elemento aibę galima suskirstyti tiktai vienu būdu. Vadinasi, $T_0 = B_0$. Iš rekurentinės formulės gauname $B_1 = B_0^2 = 1$. Kadangi T_0 irgi tenkina tą rekurentinę formulę, tai $T_1 = T_0^2 = 1$. Toliau įsitikiname, kad

$$B_2 = B_0 B_1 + B_1 B_0 = 2, \quad T_2 = T_0 T_1 + T_1 T_0 = 2$$

ir t. t. Todėl visi vienos sekos nariai sutampa su atitinkamais kitos sekos nariais. Vadinasi, įrodėme tokį teiginį:

Jei aibė turi $n+1$ elementų ir tie elementai išdėstyti tam tikra tvarka, tai jos nuoseklaus skirstymo procesų skaičius lygus

$$T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Skaičių dauginimas ir dalijimas

Turime n skaičių $a_1, \ldots a_n$, išdėstytų kokia nors eile. Remiantis daugybos asociatyvumo dėsniu, tų skaičių sandaugą galima apskaičiuoti įvairiais būdais (nekeičiant dauginamųjų tvarkos). Pavyzdžiui, tris skaičius galima sudauginti dviem būdais: $(ab)c = a(bc)$, keturis skaičius — penkiais būdais ir t. t. *Reikia sužinoti, keliais būdais galima sudauginti n skaičių, surašytų nurodytąja eile.*

Savaime aišku, kad kiekvienas dauginimo būdas yra tolygus n duotųjų skaičių aibės suskirstymui į dalis, turinčias po vieną elementą. Pavyzdžiui, keturių skaičių dauginimas pagal formulę $(ab)(cd)$ yra tolygus tokiam skirstymo procesui: $a \mid b \Big| c \mid d$, o dauginimas pagal formulę $((ab)c)d$ — skirstymo procesui $a \mid b \Big| c \Bigg| d$. Todėl skirtingų dauginimo būdų skaičius yra lygus skirtingų n-elementės aibės skirstymo procesų skaičiui, t. y. skaičiui $T_{n-1} = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}$.

Tačiau daugybai būdingas ne tik asociatyvumo, bet ir komutatyvumo dėsnis. Atsižvelgus į jį, dauginimo procesų skaičius padidės $n!$ kartų: n skaičių sukeisti vieną su kitu vietomis yra $n!$ būdų, o po sukeitimo gautąją skaičių eilę galima vienaip ar kitaip skirstyti į dalis. Iš to matyti, kad n turimųjų skaičių sandaugai apskaičiuoti yra iš viso $(n-1)!\ C_{2n-2}^{n-1}$ būdų.

Tą patį rezultatą galima gauti ir betarpiškai, nesiremiant formule skirstymo procesų skaičiui rasti. Taip spręsdami, susipažinsime su nauju būdu skirstymo procesų skaičiaus formulei išvesti, o tuo pačiu ir eilės prie kasos uždaviniui spręsti (kai rublių skaičius eilėje lygus pusrublių skaičiui).

Tiesioginis sprendimas yra šitoks. Sakykime, kad jau žinome, kiek yra būdų sudauginti n skaičių, būtent, būdų skaičius lygus $\Phi(n)$. Prie tų skaičių prijungsime dar vieną dauginamąjį a_{n+1} ir išsiaiškinsime, keliais

būdais tą dauginamąjį galima prijungti prie kokios nors skaičių $a_1, \ldots, a_n$ sandaugos.

Skaičių a_{n+1} galima sudauginti su galutine n skaičių sandauga, laikant jį arba dauginiu, arba daugikliu. Tačiau skaičių a_{n+1} galima prijungti ir bet kuriame tarpiniame etape. Dauginant n skaičių, reikia $n-1$ kartą atlikti daugybos veiksmą, kiekvieną kartą sudauginant du dauginamuosius. Todėl kiekviename etape skaičių a_{n+1} galima prijungti keturiais būdais: prie pirmojo dauginamojo jis gali būti arba dauginys, arba daugiklis, prie antrojo — taip pat arba dauginys, arba daugiklis. Kadangi etapų, kuriuose galima prijungti a_{n+1}, skaičius lygus $n-1$, tai gauname $4n-4$ būdų. Prie jų priskaitę tuos du būdus, kuriuos aptarėme pirmiausia, gauname $4n-2$ būdų skaičių a_{n+1} prijungti prie bet kurio skaičių $a_1, \ldots, a_n$ dauginimo būdo. Iš to matyti, kad

$$\Phi(n+1) = (4n-2)\,\Phi(n).$$

Kadangi $\Phi(1)=1$, tai

$$\Phi(n) = 2 \cdot 6 \ldots (4n-6) = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n-3).$$

Šis atsakymas sutampa su anksčiau gautuoju atsakymu, nes

$$\Phi(n) = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n-3) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = (n-1)!\,C_{2n-2}^{n-1}.$$

Dabar išnagrinėsime dalybos veiksmą. Parašykime reiškinį

$$\cfrac{a_1}{\cfrac{a_2}{\cfrac{a_3}{\cfrac{\vdots}{a_n}}}} \qquad (8)$$

Tas užrašas neturi prasmės, jei nenurodyta, kokia tvarka turi būti dalijama. Išsiaiškinsime, kiek yra būdų tam reiškiniui suteikti prasmę. Pastebėsime, kad kiekvieną dalijimo tvarkos nurodymą galima laikyti anksčiau aprašytu n-elementės aibės skirstymo į dalis procesu. Jau įsitikinome, kad tokių procesų skaičius lygus $\frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}$.

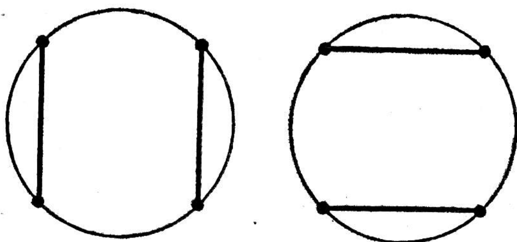
Vadinasi, (8) reiškiniui suteikti prasmę turime $\frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}$ būdų.

Daugiakampių uždavinys

Nagrinėjant kai kuriuos kvantinės mechanikos klausimus, tenka spręsti tokį uždavinį:

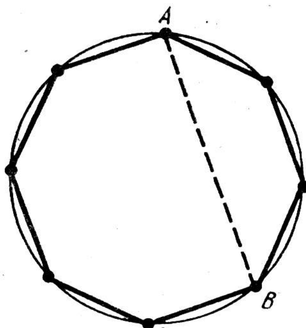
Į apskritimą įbrėžtas taisyklingasis $2n$-kampis. Kiek yra būdų sujungti jo viršūnes atkarpomis, jei nubrėžtosios atkarpos negali susikirsti viena su kita?

Kai $n=1$, yra tik vienas tokio sujungimo būdas*. Kai $n=2$, yra du būdai, pavaizduoti 31 paveiksle. Norėdami rasti būdų skaičių $F(n)$, kai n — bet kuris natūrinis skaičius, sudarysime rekurentinį sąryšį, kurį tenkina $F(n)$. Tuo tikslu pasirinksime vieną daugiakampio viršūnę, pavyz-



31 pav.

džiui, A. Ją galima sujungti su bet kokia kita viršūne B, tarp A ir B paliekant lyginį skaičių viršūnių (32 pav.). Visi viršūnių jungimo būdai suskirstomi į klases, atsižvelgiant į tai, kiek lieka viršūnių iš kairės nuo atkarpos, nubrėžtos iš taško A.



32 pav.

Jei kairėje pusėje lieka $2s$ viršūnių, tai kitoje pusėje lieka $2(n-s-1)$ viršūnių. Šitaip $2n$-kampis padalijamas į $2s$-kampį ir $2(n-s-1)$-kampį. Tačiau $2s$-kampyje nubrėžti atkarpas taip, kad jos viena su kita nesikirstų, yra $F(s)$ būdų. Tą patį padaryti $2(n-s-1)$-kampyje yra $F(n-s-1)$ būdų. Pagal dauginimo taisyklę išeina, kad s-tajai klasei priklauso $F(s)F(n-s-1)$ atkarpų nubrėžimo variantų.

Vadinasi, visų galimų variantų skaičius lygus $F(0)F(n-1)+F(1)$ $F(n-2)+\ldots+F(n-1)F(0)$. Gavome rekurentinį sąryšį

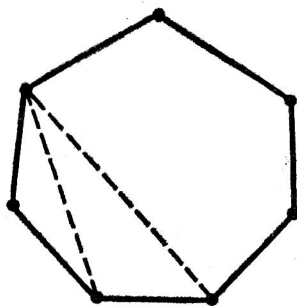
$$F(n)=F(0)\,F(n-1)+F(1)\,F(n-2)+\ldots+F(n-1)\,F(0).$$

* Skersmenį laikome „taisyklingu dvikampiu".

Tai tas pats sąryšis, kurį tenkina skaičiai $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$. Kadangi $F(0) = T_0 = 1$, tai $F(n) = T_n$, kai n — bet kuris natūrinis skaičius. Vadinasi, yra $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ būdų $2n$-kampyje nubrėžti atkarpas taip, kad jos nekirstų viena kitos.

Tas pats atsakymas gaunamas, išsprendus tokį uždavinį:

Keliais būdais galima padalyti iškilųjį $(n+2)$-kampį į trikampius, nubrėžiant to daugiakampio viduje nesikertančias įstrižaines?



33 pav.

Variantų skaičių žymėsime $\Phi(n)$. Pasirinksime vieną daugiakampio kraštinę ir klasifikuosime visus dalijimo būdus, atsižvelgdami į tai, kokia daugiakampio viršūnė sutampa su viršūne to trikampio, kurio pagrindas yra pasirinktoji kraštinė (33 pav.). Pašalinus tą trikampį, daugiakampis suskyla į $(s+2)$-kampį ir $(n-s+1)$-kampį. Dalydami tuos daugiakampius į trikampius ir kombinuodami vieno daugiakampio dalijimo būdus su kito daugiakampio dalijimo būdais, gausime visus pradinio daugiakampio skaidinius, kuriems priklauso pašalintasis trikampis. Paskui, taikydami dauginimo ir sumavimo taisykles, gauname rekurentinį sąryšį

$$\Phi(n) = \Phi(0)\,\Phi(n-1) + \Phi(1)\,\Phi(n-2) + \ldots + \Phi(n-1)\,\Phi(0),$$

kuriame $\Phi(0) = 1$. Skaitytojui siūlome, remiantis gautuoju sąryšiu, įsitikinti, kad

$$\Phi(n) = T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Mažordomo rūpesčiai

Yra ir tokių kombinatorikos uždavinių, kuriuos sprendžiant reikia sudaryti ne vieną rekurentinį sąryšį, bet sąryšių sistemą, siejančią keletą sekų. Kiekvienas sąryšis $(n+1)$-jį sekos narį susieja ne tik su pirmesniais tos pačios sekos nariais, bet ir su pirmesniaisiais kitų sekų nariais.

Kartą karaliaus Artūro mažordomas pastebėjo, kad pietų prie apvaliojo stalo susirinko 6 poros besivaidijančių riterių. Keliais būdais galima susodinti juos už stalo, kad visos besivaidijančių riterių poros būtų išskirtos?

Jei surasime kokį nors riterių susodinimo būdą, tai persodindami juos ratu, gausime dar 11 būdų. Šį kartą nelaikysime skirtingais būdų, kurie gaunami vienas iš kito, cikliškai persodinant riterius.



Sakykime, kad riterių skaičius lygus $2n$, ir susitarkime vartoti tokius žymėjimus. Skaičių susodinimo variantų, kai nėra priešininkų, sėdinčių greta, žymėsime A_n; skaičių variantų, kai greta sėdi tik du besivaidijantys riteriai, žymėsime B_n; skaičių variantų, kai yra tik dvi neišskirtos besivaidijančių riterių poros, žymėsime C_n.

Pirmiausia išvesime formulę, kuria A_{n+1} susiejamas su A_n, B_n ir C_n. Sakykime, kad porų skaičius lygus $n+1$ ir riteriai sėdi už stalo taip, kad visos besivaidijančių riterių poros yra išskirtos. Besivaidijančių riterių poras laikykime sunumeruotomis. Paprašykime išeiti iš salės riterius, sudarančius $(n+1)$-ąją porą. Galimi trys atvejai: arba likusieji už stalo riteriai sėdi taip, kad nėra nė vienos besivaidijančių kaimynų poros, arba atsirado viena tokia pora, arba tokios poros yra dvi (išėjusieji riteriai galėjo skirti tas poras)*.

Dabar išsiaiškinsime, keliais būdais išėjusius riterius galima pasodinti atgal už stalo, kad neliktų nė vienos besivaidijančių kaimynų poros.

Lengviausia juos pasodinti, jei už stalo buvo atsiradusios dvi neišskirtų priešų poros. Tokiu atveju vieną grįžusį riterį reikia pasodinti tarp pirmos poros riterių, o kitą — tarp antrosios poros riterių. Tai galima padaryti dviem būdais. Kadangi skaičius būdų pasodinti $2n$ riterių taip, kad tik dvi poros kaimynų būtų priešai, lygus C_n, tai iš viso gauname $2C_n$ variantų.

---

* Čia ir toliau tariame, kad $n>1$. Kai $n=1$, tolesni samprotavimai neturi prasmės.

Dabar tarkime, kad, išėjus dviem riteriams, už stalo atsirado tik viena neišskirtų priešų pora. Vienas iš grįžusiųjų turi atsisėsti tarp jų. Tada už stalo sėdės $2n+1$ riterių, tarp kurių bus $2n+1$ vietų. Dvi vietos (prie ką tik atsisėdusio svečio) antrajam riteriui netinka, todėl jam lieka $2n-1$ vietų. Kadangi bet kuris iš dviejų išėjusiųjų riterių galėjo grįžti pirmas, tai gauname $2(2n-1)$ variantų grįžusiems riteriams pasodinti. Bet skaičius atvejų, kai $2n$ riterių sėdi taip, kad tik du besivaidijantys riteriai nėra atskirti, lygus B_n. Todėl iš pradžių nurodyta tvarka susodinti svečius iš viso yra $2(2n-1)B_n$ būdų.

Pagaliau tarkime, kad nėra priešų, sėdinčių greta. Tokiu atveju pirmasis grįžęs riteris gali sėsti tarp bet kurių dviejų svečių, pasirinkti vieną iš $2n$ tarpų. Po to jo priešui lieka $2n-1$ vietų: jis gali sėsti bet kuriame tarpe, išskyrus du tarpus prie ką tik atsisėdusio priešininko. Vadinasi, jei $2n$ riterių jau buvo susodinti pageidaujama tvarka, tai sugrįžusiems svečiams pasodinti turime $2n(2n-1)$ būdų. Iš viso šiuo atveju gauname $2n(2n-1)A_n$ susodinimo variantų.

Kaip jau sakėme, išnagrinėtieji atvejai apima visus galimus atvejus. Todėl galima parašyti tokį rekurentinį sąryšį:

$$A_{n+1}=2n(2n-1)A_n+2(2n-1)B_n+2C_n. \qquad (9)$$

Šito sąryšio nepakanka, norint rasti A_n reikšmes, atitinkančias visas n reikšmes. Dar reikia sužinoti, kaip B_{n+1} ir C_{n+1} yra susiję su A_n, B_n ir C_n.

Sakykime, kad, susodinus $2n+2$ $(n>1)$ riterių, yra tik viena besivaidijančių kaimynų pora. Tokių atvejų skaičius, kaip sakėme, lygus B_{n+1}. Kad išvengtume kivirčo, paprašome besivaidijančią porą išeiti iš už stalo. Tada lieka $2n$ riterių, ir arba likusieji svečiai sėdi taip, kad nėra besivaidijančių kaimynų, arba yra tik viena tokių priešų pora (anksčiau tarp jų sėdėjo išėjusieji riteriai, o dabar jie atsidūrė greta). Antruoju atveju išėjusiuosius galima sodinti tik į senąją vietą: kitaip atsiras antroji besivaidijanti pora. Kadangi, sodinant $2n$ riterių taip, kad būtų tik viena besivaidijančių kaimynų pora, yra B_n galimų variantų, tai gauname $2B_n$ variantų (grįžusiuosius riterius galima sukeisti vietomis). Pirmuoju atveju grįžtančiuosius galima sodinti tarp bet kurių riterių, o tam yra $2n$ būdų. Kadangi juos dar galima sukeisti vietomis, tai gauname $4n$ variantų. Kombinuodami tuos variantus su visais galimais būdais pasodinti n porų, kad nebūtų besivaidijančių kaimynų, gauname iš viso $4nA_n$ galimų variantų. Pagaliau išėjusios ir grįžusios riterių poros numeris galėjo būti bet kuris skaičius nuo 1 iki $n+1$. Iš to matyti, kad B_{n+1} reiškiamas tokiu rekurentiniu sąryšiu:

$$B_{n+1}=4n(n+1)A_n+2(n+1)B_n. \qquad (10)$$

Pagaliau išnagrinėsime atvejį, kai, pasodinus $2n+2$ riterių už stalo, susidaro dvi besivaidijančių kaimynų poros. Tų porų numeriams pasirinkti yra $C_{n+1}^2=\frac{n(n+1)}{2}$ būdų. Kiekvieną besivaidijančių kaimynų porą pakeičiame vienu nauju riteriu, tuos du naujuosius riterius laikydami priešais. Tada už stalo sėdės $2n$ riterių, ir, be to, arba nebus nė vienos besivai-

dijančių kaimynų poros (jei naujieji riteriai nesėdi greta), arba bus tik viena tokia pora.

Pirmuoju atveju yra A_n variantų. Sugrįžti į pradinę padėtį galima 4 būdais, nes abiejų porų riterius galima keisti vietomis. Todėl pirmuoju atveju iš viso gauname $4C_{n+1}^2 A_n = 2n(n+1)A_n$ variantų.

Antrasis atvejis gali pasitaikyti $\frac{1}{n}$ B_n kartų*. Šiuo atveju grįžti į pradinę padėtį irgi 4 būdai, todėl iš viso gauname $2(n+1)B_n$ variantų. Iš to matyti, kad

$$C_{n+1} = 2n(n+1)A_n + 2(n+1)B_n, \qquad (11)$$

jei $n \geqslant 1$.

Vadinasi, sudarėme rekurentinių sąryšių sistemą

$$A_{n+1} = 2(2n-1)(nA_n + B_n) + 2C_n, \qquad (9)$$

$$B_{n+1} = 2(n+1)(2nA_n + B_n), \qquad (10)$$

$$C_{n+1} = 2(n+1)(nA_n + B_n). \qquad (11)$$

Tos lygybės teisingos, kai $n \geqslant 2$. Paprastu skaičiavimu įsitikiname, kad $A_2=2$, $B_2=0$, $C_2=4$. Todėl iš (9) — (11) sąryšių gauname $A_3=32$, $B_3=$ $=48$, $C_3=24$. Tęsdami toliau, sužinome, kad svečiams pasodinti už stalo pageidaujamu būdu yra $A_6=12\ 771\ 840$ variantų.

Išspręstasis uždavinys panašus į uždavinį, kurį dažnai vadina „svečių uždaviniu".

Keliais būdais galima pasodinti n vedusių porų apie apvalų stalą, jei tarp dviejų vyrų turi sėdėti viena moteris ir, be to, vyras su žmona negali sėdėti greta?

Šį uždavinį sprendžiame maždaug taip, kaip ir mažordomo uždavinį. Iš pradžių pasodiname moteris. Jei vietos sunumeruotos, tai visos moterys turi sėdėti arba lyginėse, arba nelyginėse vietose. Lyginių vietų skaičius lygus n, todėl jose susodinti moteris yra $n!$ būdų. Užimti nelygines vietas irgi yra $n!$ būdų. Vadinasi, susodinti moteris yra $2n!$ būdų. Paskui tiriame atvejus, kai nė vienas vyras nesėdi prie savo žmonos, kai neišskirta tik viena sutuoktinių pora, ir pagaliau kai neišskirtos dvi sutuoktinių poros. Skaitytojui siūlome sudaryti atitinkamą rekurentinių sąryšių sistemą.

Laimingieji troleibusų bilietai

Kai kas šešiaženklį troleibuso bilieto numerį laiko „laimingu", kai skaitmenų, parašytų lyginėse vietose, suma lygi sumai skaitmenų, parašytų nelyginėse vietose. Pavyzdžiui, bilietas 631 752 laikomas „laimingu", nes $6+1+5=3+7+2=12$. Reikia apskaičiuoti, kiek „laimingų" numerių yra tarp 000 000 ir 999 999.

---

* Yra B_n atvejų, kai kokia nors priešų pora sėdi greta. Jei nurodysime, kuri pora turi sėdėti greta, tai atvejų bus n kartų mažiau.

Pirmiausia apskaičiuosime, kiek yra triženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi tam tikram skaičiui N (šiuo atveju triženkliais laikysime ir tokius skaičius, kaip 075, ir net skaičių 000). Tas uždavinys panašus į uždavinį, kurį išsprendėme 77 puslapyje: dėmenų skaičius lygus 3, suma lygi N, o dėmenys — skaičiai nuo 0 iki 9. Jo sprendinių skaičių žymėsime $F(3, 9; N)$. Tada galėsime parašyti tokį rekurentinį sąryšį:

$$F(3, 9; N)=F(2, 9; N)+F(2, 9; N-1)+F(2, 9; N-2)+$$
$$+F(2, 9; N-3)+F(2, 9; N-4)+F(2, 9; N-5)+F(2, 9; N-6)+$$
$$+F(2, 9; N-7)+F(2, 9; N-8)+F(2, 9; N-9).$$

Panašiai

$$F(2, 9; N)=F(1, 9; N)+F(1, 9; N-1)+\ldots+F(1, 9; N-9).$$

Savaime aišku, kad $F(1, 9; N)=1$, kai $0 \leqslant N \leqslant 9$; kitais atvejais $F(1, 9; N)=0$. Remdamiesi tais sąryšiais, nesunkiai užpildome šitokią lentelę:

8 lentelė

k \ N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69	73	75	75

k \ N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	73	69	63	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1

Norint sužinoti, kiek yra „laimingų" bilietų, reikia skaičius, parašytus trečiojoje eilutėje, pakelti kvadratu ir gautuosius skaičius sudėti. Iš tikrųjų, kiekviename „laimingame" biliete skaitmenų, parašytų lyginėse vietose, suma lygi sumai skaitmenų, parašytų nelyginėse vietose. Sakykime, kad ta suma lygi N. Trečiojoje eilutėje parašytasis skaičius rodo, kiek triženklių skaičių turi skaitmenų sumą, lygią N. Kitaip sakant, keliais būdais galima pasirinkti skaitmenis, rašomus lyginėse vietose (t. y. antroje, ketvirtoje ir šeštoje vietoje). Tiek pat būdų turime pasirinkti skaitmenis nelyginėms vietoms (pirmajai, trečiajai ir penktajai vietai) užpildyti. Kadangi vienas pasirinkimas nepriklauso nuo kito, tai pagal dauginimo taisyklę turi būti $[F(N)]^2$ „laimingų" numerių, kurių skaitmenų, parašytų lyginėse vietose, suma lygi N. Visų „laimingų" bilietų skaičių randame pagal sumavimo taisyklę:

$$2(1^2+3^2+6^2+10^2+15^2+21^2+28^2+36^2+45^2+55^2+63^2+69^2+$$
$$+73^2+75^2).$$

Apskaičiavę tą sumą, gauname atsakymą 55 252.

Rekurentinės lentelės

Kombinatorikoje dažnai susiduriame su dydžiais, priklausančiais ne nuo vieno, bet nuo kelių skaičių. Pavyzdžiui, skaičius C_n^k priklauso ir nuo n, ir nuo k. Jei tiriamasis dydis $F(n, k)$ priklauso nuo dviejų natūrinių skaičių n ir k, tai jo reikšmes galima surašyti lentelėje, $F(n, k)$ parašant n-tosios eilutės ir k-tojo stulpelio sankryžoje. Tokie dydžiai mums ne kartą pasitaikė V skyriuje: aritmetinis kvadratas, aritmetiniai trikampiai ir apibendrinti aritmetiniai trikampiai kaip tik buvo tokio tipo lentelės.

Visuose V skyriuje išnagrinėtuose pavyzdžiuose lentelės elementai buvo vieni su kitais susiję. Ta sąsaja padėjo apskaičiuoti lentelės n-tosios eilutės elementus, kai buvo žinomi pirmesnės eilutės elementai ir galbūt keli pirmieji n-tosios eilutės elementai. Todėl, pasirašę pirmąją lentelės eilutę ir pirmuosius kitų eilučių elementus, galėjome paeiliui apskaičiuoti kitas eilutes. Tokios lentelės primena rekurentines sekas, todėl jas toliau vadinsime *rekurentinėmis lentelėmis.*

Aritmetinį kvadratą sudarinėjome pagal tokį rekurentinį sąryšį

$$F(n, k)=F(n-1, k)+F(n, k-1); \qquad (12)$$

kraštinės sąlygos čia buvo reiškiamos taip: $F(n, 0)=1$, $F(0, k)=0$, kai $k>0$ (primename, kad, kalbėdami apie aritmetinį kvadratą, turime mintyje ne pirmąjį stulpelį arba eilutę, bet nulinį stulpelį arba eilutę).

Aritmetiniam penkiakampiui arba šešiakampiui sudaryti irgi tinka (12) sąryšis. Juk tas figūras gavome, skaičiuodami, keliais būdais šachmatų bokštas gali patekti į nurodytą langelį, judėdamas lentoje, apribotoje dviem vienas kitam statmenais spinduliais ir viena arba dviem tiesėmis, lygiagrečiomis pagrindinei įstrižainei. Į langelį (n, k) bokštas gali patekti arba iš langelio $(n-1, k)$, arba iš langelio $(n, k-1)$. Todėl, kaip beapribotume bokšto judėjimą, vis tiek (12) sąryšis bus tenkinamas. Iš apribojimų išplaukia tik tai, kad kai kurie lentelės elementai turi būti nuliai. Aritmetiniame penkiakampyje tokie elementai yra virš kokios nors tiesės, lygiagrečios pagrindinei įstrižainei, aritmetiniame šešiakampyje — šalia srities, apribotos dviem tiesėmis, lygiagrečios pagrindinei įstrižainei.

Aritmetinio trikampio ir m-skaičio aritmetinio trikampio rekurentinis sąryšis yra kitoks, būtent, m-skaičiame aritmetiniame trikampyje

$$F(n, k)=F(n-1, k-m+1)+F(n-1, k-m+2)+\ldots+$$
$$+F(n-1, k). \qquad (13)$$

Be to, čia $F(0, 0)=1$, $F(0, k)=0$, kai $k>0$.

Kitas mažordomo problemos sprendimas

Kaip dar vieną rekurentinių lentelių panaudojimo pavyzdį, pateiksime kitą mažordomo problemos sprendimą (žr. p. 122 – 125). Skaitytojas turbūt atsimena, kad buvo kalbama apie tai, kiek yra būdų susodinti $2n$ riterių apie apvalų stalą taip, kad niekur priešai nesėdėtų greta (iš $2n$

riterių buvo susidarę n besivaidijančių porų). Skaičių, parodantį, kiek yra būdų susodinti $2n$ riterių taip, kad liktų tiksliai m neišskirtų besivaidijančių porų, žymėsime $F(m, n)$. Išvesime rekurentinę formulę, siejančią $F(m, n+1)$ su $F(k, n)$, kai $k=m-1, m, m+1, m+2$.

Tarsime, kad iš pradžių apie stalą sėdėjo n porų riterių, o paskui atėjo ir atsisėdo $(n+1)$-oji pora. Apskaičiuosime, keliais atvejais apie stalą susidarys m neišskirtų besivaidijančių porų. Tai gali atsitikti šitaip:

a) Už stalo sėdintys greta priešai sudarė $m-1$ porų. Tokia situacija turi $F(m-1, n)$ variantų. Kad už stalo atsirastų m porų besivaidijančių kaimynų, naujosios poros riteriai turi atsisėsti greta, neišskirdami nė vienos jau buvusios besivaidijančių kaimynų poros. Tačiau tarp $2n$ riterių yra $2n$ tarpų, o sėsti negalima į $m-1$ tarpų. Todėl lieka $2n-m+1$ tarpų, kur gali atsisėsti naujai atvykę riteriai. Kadangi į kiekvieną tarpą galima sėsti dviem būdais (atvykę riteriai gali pasikeisti vietomis), tai iš viso gauname

$$2(2n-m+1)F(m-1, n) \tag{14}$$

kombinacijų.

b) Už stalo buvo m porų greta sėdinčių priešų. Tokiu atveju naujai atvykusieji gali pasirinkti vieną iš dviejų galimybių: arba sėsti atskirai, neišskirdami nė vienos priešiškų kaimynų poros, arba sėsti greta tarp dviejų besivaidijančių kaimynų. Lengva apskaičiuoti, kad pirmajam sumanymui įgyvendinti yra $(2n-m)(2n-m-1)$ būdų, o antrajam – $2m$ būdų, t. y. iš viso $(2n-m)^2-2n+3m$ būdų. Kadangi n porų riterių susodinti taip, kad liktų kaip tik m neišskirtų besivaidijančių porų, yra $F(m, n)$ būdų, tai iš viso gauname

$$\left((2n-m)^2-2n+3m\right)F(m, n) \tag{15}$$

galimų variantų.

c) Dabar išnagrinėsime atvejį, kai iš $2n$ riterių greta sėdėjo $m+1$ priešų porų (taip susodinti yra $F(m+1, n)$ būdų). Šiuo atveju vienam iš naujai atvykusiųjų reikia atsisėsti tarp dviejų besivaidijančių kaimynų, o antrajam — neišskirti nė vienos priešų poros. Pirmąją užduotį atlikti yra $m+1$ būdų, o antrąją $2n-m-1$ būdų. Iš viso yra $2(m+1)(2n-m-1)$ galimybių (daugiklis 2 parašytas todėl, kad bet kuris iš naujai atvykusiųjų gali atsisėsti tarp priešų). Vadinasi, aptariamasis atvejis turi iš viso

$$2(m+1)(2n-m-1)F(m+1, n) \tag{16}$$

variantų.

d) Pagaliau sakykime, kad buvo $m+2$ porų besivaidijančių kaimynų. Tai galėjo atsitikti vienu iš $F(m+2, n)$ būdų. Kad liktų tik m besivaidijančių neišskirtų porų, abu naujai atvykusieji turi išskirti po vieną porą besivaidijančių kaimynų. Pirmajam riteriui atsisėsti yra $m+2$ vietų, o antrajam lieka tik $m+1$ vietų. Iš viso gauname

$$(m+1)(m+2)F(m+2, n) \tag{17}$$

galimų variantų.

Lengva suvokti, kad mes suminėjome visus galimus atvejus, kuriais iš $2n+2$ riterių už apvaliojo stalo susidaro m neišskirtų besivaidijančių porų. Todėl $F(m, n)$ tenkina tokį rekurentinį sąryšį:

$$F(m, n+1)=2(2n-m+1)F(m-1, n)+$$
$$+\left((2n-m)^2-2n+3m\right)F(m, n)+2(m+1)(2n-m-1)F(m+1, n)+$$
$$+(m+1)(m+2)F(m+2, n). \qquad (18)$$

Betarpiškai skaičiuodami, įsitikiname, kad $F(0, 2)=2$, $F(1, 2)=0$, $F(2, 2)=4$ (susodinimo variantų, kurie gaunami vienas iš kito ciklišku perkėlimu, nelaikome skirtingais).

Taikydami (18) formulę, apskaičiuojame $F(0, 6)=12\ 771\ 840$.

Rekurentinio sąryšio sprendinys

Susitarsime sakyti, kad rekurentinio sąryšio eilė lygi k, kai jis sieja $f(n+k)$ su $f(n)$, $f(n+1)$, ..., $f(n+k-1)$. Pavyzdžiui,

$$f(n+2)=f(n)f(n+1)-3f^2(n+1)+1$$

yra antros eilės rekurentinis sąryšis, o

$$f(n+3)=6f(n)f(n+2)+f(n+1)$$

— trečios eilės rekurentinis sąryšis.

Turimą k-tosios eilės rekurentinį sąryšį tenkina be galo daug skirtingų sekų. Mat k pirmųjų sekos narių galima pasirinkti visiškai laisvai — jie nėra susieti sąryšiais. Tačiau, kai k pirmųjų narių pasirinkta, visi kiti nariai apskaičiuojami vienareikšmiškai: narys $f(k+1)$ pagal rekurentinį sąryšį išreiškiamas nariais $f(1)$, ..., $f(k)$, narys $f(k+2)$ — nariais $f(2)$, ..., $f(k+1)$ ir t. t.

Remiantis rekurentiniu sąryšiu ir pirmaisiais sekos nariais, galima vieną po kito apskaičiuoti sekos narius ir anksčiau ar vėliau surasti bet kurį sekos narį. Tačiau tokiu atveju turime apskaičiuoti ir visus pirmesniuosius narius: juk jų nežinodami, negalime rasti tolesnių narių. Vis dėlto dažnai reikalingas tik vienas konkretus sekos narys, o kitų narių nereikia. Todėl pravartu turėti išreikštinę n-tojo sekos nario formulę. Susitarsime sakyti, kad kuri nors seka yra turimojo rekurentinio sąryšio *sprendinys*, kai, tą seką įrašius į rekurentinį sąryšį, gaunama tapatybė. Pavyzdžiui, vienas rekurentinio sąryšio

$$f(n+2)=3f(n+1)-2f(n)$$

sprendinys yra seka

$$2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$$

Iš tikrųjų bendrasis tos sekos narys yra $f(n)=2^n$. Todėl $f(n+2)=2^{n+2}$, $f(n+1)=2^{n+1}$. Kadangi lygybė $2^{n+2}=3\cdot2^{n+1}-2\cdot2^n$ yra teisinga su bet kokia natūrine n reikšme, tai 2^n yra to sąryšio sprendinys.

Rekurentinio k-tosios eilės sąryšio sprendinys vadinamas *bendruoju sprendiniu*, jei jis priklauso nuo k laisvųjų konstantų C_1, ..., C_k, kurias pasirinkus galima gauti bet kurį to sąryšio sprendinį. Pavyzdžiui, sąryšio

$$f(n+2)=5f(n+1)-6f(n) \qquad (19)$$

bendrasis sprendinys yra

$$f(n)=C_1\cdot2^n+C_2\cdot3^n. \qquad (20)$$

Iš tikrųjų lengva patikrinti, kad (20) seka (19) sąryšį paverčia tapatybe. Todėl belieka tik patikrinti, ar kiekvieną (19) sąryšio sprendinį galima išreikšti (20) pavidalu. Kadangi

kiekvienas (19) sąryšio sprendinys vienareikšmiškai nustatomas iš reikšmių $f(1)$ ir $f(2)$, tai mums reikia įrodyti, jog bet kokius skaičius a ir b atitinka tokios konstantos C_1 ir C_2, kad

$$2C_1+3C_2=a$$

ir

$$2^2 C_1+3^2 C_2=b.$$

Tačiau lengva pastebėti, kad su bet kokiomis a ir b reikšmėmis lygčių sistema

$$\begin{cases} 2C_1+3C_2=a, \\ 4C_1+9C_2=b \end{cases}$$

turi sprendinį. Todėl (20) seka tikrai yra (19) sąryšio bendrasis sprendinys.

Tiesiniai rekurentiniai sąryšiai su pastoviais koeficientais

Rekurentiniams sąryšiams spręsti, apskritai kalbant, bendrų taisyklių nėra. Tačiau yra labai dažnai pasitaikančių sąryšių klasė, sprendžiama bendru metodu. Ją sudaro rekurentiniai sąryšiai

$$f(n+k)=a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+\ldots+a_kf(n), \tag{22}$$

kurių koeficientai $a_1, a_2, \ldots a_k$ — kokie nors skaičiai. Tokie sąryšiai vadinami *tiesiniais rekurentiniais sąryšiais su pastoviais koeficientais.*

Iš pradžių aptarsime, kaip sprendžiami tokie sąryšiai, kai $k=2$, t. y. tirsime sąryšius

$$f(n+2)=a_1f(n+1)+a_2f(n). \tag{23}$$

Jų sprendimas pagrįstas dviem tokiais teiginiais:

1) Jei $f_1(n)$ ir $f_2(n)$ yra (23) rekurentinio sąryšio sprendiniai, tai seką $f(n) = Af_1(n)+ +Bf_2(n)$, kurios koeficientai A ir B — bet kokie skaičiai, irgi yra to sąryšio sprendinys.

Iš tikrųjų, remdamiesi pasakytąja sąlyga, galime parašyti dvi tapatybes:

$$f_1(n+2)=a_1f_1(n+1)+a_2f_1(n)$$

ir

$$f_2(n+2)=a_1f_2(n+1)+a_2f_2(n).$$

Jei pirmąją tapatybę panariui padauginsime iš skaičiaus A, o antrąją — iš B ir gautąsias tapatybes sudėsime, tai gausime tapatybę

$$Af_1(n+2)+Bf_2(n+2)=a_1\big(Af_1(n+1)+Bf_2(n+1)\big)+a_2\big(Af_1(n)+Bf_2(n)\big).$$

Iš gautosios tapatybės matyti, kad $Af_1(n)+Bf_2(n)$ yra (23) sąryšio sprendinys.

2) Jei skaičius r_1 yra kvadratinės lygties $r^2=a_1r+a_2$ sprendinys, tai seka

$$1,\ r_1,\ r_1^2,\ \ldots,\ r_1^{n-1},\ \ldots$$

yra rekurentinio sąryšio $f(n+2)=a_1f(n+1)+a_2f(n)$ sprendinys.

Iš tikrųjų, jei $f(n)=r_1^{n-1}$, tai $f(n+1)=r_1^n$, o $f(n+2)=r_1^{n+1}$. Tas reikšmes parašę (23) sąryšyje, gauname lygybę

$$r_1^{n+1}=a_1r_1^n+a_2r_1^{n-1}.$$

Ji teisinga, nes sąlygoje pasakyta, kad $r_1^2=a_1r_1+a_2$.

Pastebėsime, kad ne tik seka $\{r_1^{n-1}\}$, bet ir kiekviena seka

$$f(n)=r_1^{n+m}\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

yra (23) sąryšio sprendinys. Norint tuo įsitikinti, pakanka remtis pirmuoju teiginiu, imant $A=r_1^{m+1}$, $B=0$.

Iš pirmojo ir antrojo teiginio gauname tokią taisyklę antros eilės tiesiniams rekurentiniams sąryšiams spręsti:

Sakykime, reikia išspręsti rekurentinį sąryšį

$$f(n+2)=a_1 f(n+1)+a_2 f(n). \tag{23}$$

Sudarome kvadratinę lygtį

$$r^2=a_1 r+a_2, \tag{24}$$

kuri vadinama to sąryšio charakteringąja lygtimi. Jei ji turi dvi skirtingas šaknis r_1 *ir* r_2, *tai bendrasis* (23) *sąryšio sprendinys*

$$f(n)=C_1 r_1^{n-1}+C_2 r_2^{n-1}.$$

Tai taisyklei pateisinti pirmiausia pastebėsime, kad pagal antrąjį teiginį sekos $f_1(n)=r_1^{n-1}$ ir $f_2(n)=r_2^{n-1}$ yra (23) sąryšio sprendiniai. Tokiu atveju, remdamiesi pirmuoju teiginiu, darome išvadą, kad $C_1 r_1^{n-1}+C_2 r_2^{n-1}$ irgi yra to sąryšio sprendinys. Reikia tik įsitikinti, kad bet kurį (23) sąryšio sprendinį galima taip parašyti. Kadangi kiekvieną antros eilės sąryšio sprendinį apibrėžia skaičiai $f(1)$ ir $f(2)$, tai užtenka įrodyti, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} C_1+C_2=a, \\ C_1 r_1+C_2 r_2=b \end{cases}$$

turi sprendinį, kai a ir b — bet kokie skaičiai. Patikrinkite, kad tas sprendinys yra

$$C_1=\frac{b-ar_2}{r_1-r_2}, \quad C_2=\frac{ar_1-b}{r_1-r_2}.$$

Atvejį, kai (24) lygties šaknys sutampa viena su kita, išnagrinėsime vėliau, o dabar pateiksime pavyzdį suformuluotajai taisyklei pritaikyti.

Tirdami Fibonačio skaičius, sudarėme rekurentinį sąryšį

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2). \tag{25}$$

To sąryšio charakteringoji lygtis yra tokia:

$$r^2=r+1.$$

Parašytosios lygties šaknys yra šitokie skaičiai:

$$r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Todėl Fibonačio sąryšio bendrasis sprendinys parašomas taip:

$$f(n)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{26}$$

(pasirėmę anksčiau padaryta pastaba, vietoj rodiklio $n-1$ parašėme rodiklį n).

Fibonačio skaičių seka vadiname (25) sąryšio sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $f(0)=1, f(1)=2$, t. y. seką 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Dažnai būna patogiau tos sekos pradžioje prirašyti skaičius 0 ir 1, t. y. nagrinėti seką 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Savaime aišku, kad ta seka tenkina tą patį (25) rekurentinį sąryšį ir pradines sąlygas $f(0)=0, f(1)=1$. Jei (26) formulėje parašysime $n=0$ ir $n=1$, tai gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}(C_1-C_2)=1, \end{cases}$$

iš kurios galima rasti C_1 ir C_2. Kadangi iš tos sistemos gauname $C_1=-C_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$, tai

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \tag{27}$$

Iš pirmo žvilgsnio atrodo keista, kad kiekvieną natūrinę n reikšmę atitinka sveika to reiškinio reikšmė.

Charakteringoji lygtis su lygiomis šaknimis

Stabtelėsime dabar ties tuo atveju, kai charakteringosios šaknys sutampa: $r_1=r_2$. Tokiu atveju reiškinys $C_1 r_1^{n-1}+C_2 r_2^{n-1}$ nebebus bendrasis sprendinys, nes jį galima parašyti taip:

$$f(n)=(C_1+C_2)r_1^{n-1}=Cr_1^{n-1}.$$

Lieka tik viena laisvoji konstanta C, o pasirinkti ją, tenkinant dvi pradines sąlygas $f(1)=a$ ir $f(2)=b$, apskritai kalbant, neįmanoma.

Vadinasi, reikia rasti kokį nors kitą sprendinį, skirtingą nuo $f_1(n)=r_1^{n-1}$. Pasirodo, kad toks sprendinys yra $f_2(n)=nr_1^{n-1}$. Iš tikrųjų, jei kvadratinė lygtis $r^2=a_1 r+a_2$ turi dvi sutampančias šaknis $r_1=r_2$, tai pagal Vijetos teoremą $a_1=2r_1$, $a_2=-r_1^2$. Todėl tą lygtį galima parašyti taip:

$$r^2=2r_1 r-r_1^2.$$

Tokiu atveju rekurentinį sąryšį reikia rašyti šitaip:

$$f(n+2)=2r_1 f(n+1)-r_1^2 f(n). \tag{28}$$

Patikrinsime, kad $f_2(n)=nr_1^{n-1}$ iš tikrųjų yra jo sprendinys. Šiuo atveju $f_2(n+2)=$ $=(n+2)r_1^{n+1}$, o $f_2(n+1)=(n+1)r_1^n$. Tas reikšmes parašę (28) sąryšyje, gauname aiškią tapatybę

$$(n+2)r_1^{n+1}=2(n+1)r_1^{n+1}-nr_1^{n+1}.$$

Vadinasi, nr_1^{n-1} – (28) sąryšio sprendinys.

Dabar jau turime du tiriamojo sąryšio sprendinius: $f_1(n)=r_1^{n-1}$ ir $f_2(n)=nr_1^{n-1}$. Jo bendrasis sprendinys rašomas taip:

$$f(n)=C_1 r_1^{n-1}+C_2 nr_1^{n-1}=r_1^{n-1}(C_1+C_2 n).$$

Tinkamai pasirinkus konstantas C_1 ir C_2, galima patenkinti bet kokias pradines sąlygas.

Tiesiniai rekurentiniai sąryšiai su pastoviais koeficientais, kurių eilė yra aukštesnė už du, sprendžiami tokiu pat būdu. Sakykime, yra toks sąryšis:

$$f(n+k)=a_1 f(n+k-1)+\ldots+a_k f(n). \tag{29}$$

Parašome charakteringąją lygtį

$$r^k=a_1 r^{k-1}+\ldots+a_k.$$

Jei ta algebrinė k-tojo laipsnio lygtis turi skirtingas šaknis $r_1, \ldots, r_k$, tai (29) sąryšio bendrasis sprendinys yra

$$f(n)=C_1 r_1^{n-1}+C_2 r_2^{n-1}+\ldots+C_k r_k^{n-1}.$$

Jei, pavyzdžiui, $r_1=r_2=\ldots=r_s$, tai tą šaknį atitinka tokie (29) rekurentinio sąryšio sprendiniai:

$$f_1(n)=r_1^{n-1},\ f_2(n)=nr_1^{n-1},\ f_3(n)=n^2 r_1^{n-1},\ \ldots,\ f_s(n)=n^{s-1} r_1^{n-1}.$$

Todėl tą šaknį atitinka tam tikra bendrojo sprendinio dalis, būtent,

$$r_1^{n-1}(C_1+C_2 n+C_3 n^2+\ldots+C_s n^{s-1}).$$

Sudarę tokius reiškinius visoms šaknims ir sudėję, gauname bendrąjį (29) sąryšio sprendinį.

Pavyzdžiui, išspręsime rekurentinį sąryšį

$$f(n+4)=5f(n+3)-6f(n+2)-4f(n+1)+8f(n).$$

Šiuo atveju rašome tokią charakteringąją lygtį:

$$r^4-5r^3+6r^2+4r-8=0.$$

Šios lygties šaknys: $r_1=2$, $r_2=2$, $r_3=2$, $r_4=-1$.

Vadinasi, bendrasis sąryšio sprendinys yra šitoks:

$$f(n)=2^{n-1}(C_1+C_2 n+C_3 n^2)+C_4\cdot(-1)^{n-1}.$$

Rekurentinių sąryšių teorijos taikymas informacijos perdavimo klausimams

Jau sprendėme uždavinį, kuriame buvo reikalaujama sužinoti, kiek skirtingų pranešimų galima perduoti per laiką T, kai žinoma atskirų signalų perdavimo trukmė. Jį spręsdami, sudarėme rekurentinį sąryšį

$$f(T)=f(T-t_1)+f(T-t_2)+\ldots+f(T-t_n); \tag{30}$$

be to, $f(0)=1$ ir $f(T)=0$, kai $T<0$.

Skaičius $T, t_1, \ldots, t_n$ laikysime sveikais, o (30) sąryšio charakteringosios lygties šaknis žymėsime $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Tada bendrasis sąryšio sprendinys bus

$$f(T)=C_1\lambda_1^T+\ldots+C_k\lambda_k^T.$$

Sakykime, kad λ_1 – charakteringosios lygties šaknis, kurios modulis yra didžiausias. Tokiu atveju, esant didelėms T reikšmėms, visi $f(T)$ dėmenys bus labai maži, palyginus su pirmuoju. Todėl

$$f(T)\sim C_1\lambda_1^T.$$

Šita apytikslė lygybė įgalina įvertinti skaičių pranešimų, kuriuos turimąja signalų sistema galima perduoti per laiką T.

Trečiasis mažordomo uždavinio sprendimas

Abu mažordomo uždavinio sprendimai, su kuriais jau susipažinome rėmėsi rekurentiniais sąryšiais. Dabar išvesime formulę, išreiškiančią tų sąryšių sprendinį; pagal ją galėsime tiesiogiai apskaičiuoti, kiek yra būdų besivaidijančius riterius susodinti apie stalą. Taikysime priskirties ir išskirties formulę. Pažymėkime raide α_k tokį įvykį: k-toji besivaidijančių riterių pora nėra išskirta. Apskaičiuokime $N(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$, t. y. sužinokime, keliais atvejais bus k neatskirtų besivaidijančių porų.

Pirmajai porai pasodinti už stalo yra $4n$ būdų ($2n$ būdų parinkti vietą pirmajam riteriui ir pasodinti antrąjį riterį sekančioje pagal laikrodžio rodyklę vietoje; be to, kiekvieną kartą riterius galima sukeisti vietomis). Kitiems riteriams liks $2n-2$ vietų, be to, jas reikia užimti taip, kad antroji, trečioji, ..., k-toji priešų poros nebūtų išskirtos. Tarkime, kad kiekviena tokia riterių pora sudaro vieną „objektą". Turint $k-1$ „objektų" ir $2n-2k$ likusių riterių, juos galima sukeitinėti vietomis vieną su kitu; tokių kėlinių skaičius lygus $(2n-k-1)!$. Pasirinkus vieną tokį kėlinį ir pasodinus riterius ta eile į laisvąsias vietas, pasirinktosios priešų poros (jų yra $k-1$) nebus išskirtos. Ta sąlyga nebus pažeista, net kai kuriuos greta sėdinčius priešus sukeitus vietomis. Kadangi tokių sukeitimų skaičius lygus 2^{k-1}, tai iš viso gauname $4n\cdot 2^{k-1}(2n-k-1)!$ variantų. Vadinasi,

$$N(\alpha_1\ldots\alpha_k)=2^{k+1}n(2n-k-1)!.$$

Mes norime sužinoti, kiek yra tokių atvejų, kai nė vienos poros priešai nesėdi greta, t. y. apskaičiuoti $N(\alpha_1'\ldots\alpha_n')$. Turėdami mintyje, kad pasirinkti k porų yra C_n^k būdų, pagal priskirties ir išskirties formulę gauname

$$A_n=N(\alpha_1'\ldots\alpha_n')=(2n)!-C_n^1 2^2 n(2n-2)!+C_n^2 2^3 n(2n-3)!-$$
$$-\ldots+(-1)^k C_n^k 2^{k+1} n(2n-k-1)!+\ldots+(-1)^n 2^{n+1} n!.$$

VII SKYRIUS

KOMBINATORIKA IR EILUTĖS

Rekurentinių sąryšių metodu galima spręsti daugelį kombinatorikos uždavinių. Tačiau daugeliu atvejų rekurentinius sąryšius labai sunku sudaryti, o dar sunkiau juos išspręsti. Dažnai tų sunkumų pavyksta išvengti, naudojantis generuojančiomis funkcijomis. Kadangi generuojančios funkcijos sąvoka yra susijusi su begalinėmis laipsninėmis eilutėmis, tai mums pirmiausia reikia susipažinti su tomis eilutėmis.

Daugianarių dalyba

Skaitytojas, be abejo, moka daugianarį padalyti iš kito daugianario. Jei $f(x)$ ir $\varphi(x)$ — du daugianariai, tai visada egzistuoja tokie daugianariai $q(x)$ (dalmuo) ir $r(x)$ (liekana), kad $f(x) = \varphi(x)\, q(x) + r(x)$ ir, be to, daugianario $r(x)$ laipsnis yra mažesnis už $\varphi(x)$ laipsnį arba $r(x) = 0$. Tokiu atveju $f(x)$ vadinamas daliniu, o $\varphi(x)$ — dalikliu. Jei norėsime dalyti be liekanos, tai dalmenimis reikės laikyti ne tik daugianarius, bet ir begalines laipsnines eilutes. Norint rasti dalmenį, daugianariai išdėstomi pagal didėjantį kintamojo x laipsnį ir dalijami „kampeliu", pradedant nuo žemiausio laipsnio narių. Pavyzdžiui, dalydami 1 ir $1-x$, gauname

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-x \\ \cline{2-2}
\underline{\mp 1 \pm x} & 1+x+x^2+\dots \\
\quad x & \\
\quad \underline{\mp x \pm x^2} & \\
\qquad x^2 & \\
\qquad \underline{\mp x^2 \pm x^3} & \\
\qquad\quad x^3 \dots &
\end{array}$$

Savaime aišku, kad toks dalijimo procesas niekada nesibaigs (kaip, pavyzdžiui, skaičių $\frac{1}{3}$ reiškiant begaline dešimtaine trupmena). Indukcijos metodu lengva įsitikinti, kad šiuo atveju visi dalmens koeficientai lygūs vienetui. Todėl dalmuo yra begalinė eilutė

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Apskritai, jei $f(x)$ ir $\varphi(x)$ yra daugianariai:

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n, \quad \varphi(x) = b_0 + \dots + b_m x^m$$

ir, be to, daugianario $\varphi(x)$ laisvasis narys b_0 nelygus nuliui ($b_0 \neq 0$), tai, dalydami $f(x)$ iš $\varphi(x)$, gauname begalinę eilutę

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_k x^k + \ldots \tag{1}$$

Pavyzdžiui, kai $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3$, o $\varphi(x) = x^2 - x + 1$, nurodytuoju metodu gauname

$$\begin{array}{l|l}
3 + x - 2x^2 + 6x^3 & 1 - x + x^2 \\ \cline{2-2}
\mp 3 \pm 3x \mp 3x^2 & 3 + 4x - x^2 + x^3 + 2x^4 + \ldots \\ \cline{1-1}
\quad 4x - 5x^2 + 6x^3 & \\
\quad \mp 4x \pm 4x^2 \mp 4x^3 & \\ \cline{1-1}
\quad\quad -x^2 + 2x^3 & \\
\quad\quad \pm x^2 \mp x^3 \pm x^4 & \\ \cline{1-1}
\quad\quad\quad x^3 + x^4 & \\
\quad\quad\quad \mp x^3 \pm x^4 \mp x^5 & \\ \cline{1-1}
\quad\quad\quad\quad 2x^4 - x^5 & \\
\quad\quad\quad\quad \cdots\cdots &
\end{array}$$

Panašiai atsitinka visada, kai $b_0 \neq 0$ ir $r(x) \neq 0$. Tik tuo atveju, kai $f(x)$ dalijasi iš $\varphi(x)$ be liekanos, (1) eilutė nutrūksta: gauname daugianarį.

Algebrinės trupmenos ir laipsninės eilutės

Daugianarį $f(x)$ dalydami iš daugianario $\varphi(x)$, gavome begalinę laipsninę eilutę. Kyla klausimas, kaip ta eilutė siejama su algebrine trupmena $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, t. y. kokia prasmė teikiama lygybei

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{2}$$

Imkime, pavyzdžiui, tokį dėstinį:

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \tag{3}$$

Lygybės ženklo kol kas nerašome, nes nežinia, kokią prasmę turi dešinėje pusėje parašytoji suma, sudaryta iš be galo daug dėmenų. Siekdami tai išsiaiškinti, pamėginkime abiejose (3) sąryšio pusėse vietoj x parašyti keletą skaičių. Iš pradžių tarkime, kad $x = \frac{1}{10}$. Tada kairioji sąryšio pusė įgis reikšmę $\frac{10}{9}$, o dešinioji taps begaline skaičių eilute

$$1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots + 0{,}000\ldots01 + \ldots$$

Kadangi nemokame sudėti be galo daug dėmenų, tai pamėginkime iš pradžių imti vieną dėmenį, paskui — du dėmenis, po to — tris ir t. t. Gausime tokias sumas:

$$1;\ 1{,}1;\ 1{,}11;\ \ldots;\ \underbrace{1{,}111\ldots1}_{n \text{ vienetų}};\ \ldots$$

Aišku, kad, didinant n, tos sumos artėja prie skaičiaus $\frac{10}{9}=1,11\ldots$, t. y. prie reikšmės, kurią įgijo kairioji sąryšio pusė, kai $x=\frac{1}{10}$.

Panašią išvadą gausime, kai abiejose (3) sąryšio pusėse vietoj x parašysime skaičių $\frac{1}{2}$. Kairioji pusė įgis reikšmę 2, o dešinioji taps begaline skaičių eilute

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Imdami iš eilės vieną, du, tris, keturis, ... dėmenis, gauname tokius skaičius:

$$1;\ 1\frac{1}{2};\ 1\frac{3}{4};\ 1\frac{7}{8};\ \ldots;\ 2-\frac{1}{2^n};\ \ldots$$

Aišku, kad, didinant n, tie skaičiai artėja prie skaičiaus 2.

Tačiau, kai $x=4$, kairioji (3) sąryšio pusė įgyja reikšmę $-\frac{1}{3}$, o dešinėje susidaro eilutė $1+4+4^2+\ldots+4^n+\ldots$ Paeiliui sudėdami tos eilutės narius, gauname sumas 1; 5; 21; 85; ... Tos sumos neaprėžtai didėja ir neartėja prie skaičiaus $-\frac{1}{3}$.

Vadinasi, aptikome du galimus atvejus. Skirdami pirmąjį atvejį nuo antrojo, apibrėšime bendrą skaičių eilutės konvergavimo ir divergavimo sąvoką. Sakykime, turime begalinę skaičių eilutę

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (4)$$

Jei skirtumas $b-(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, neaprėžtai didinant n, artėja prie nulio, tai sakoma, kad ta eilutė *konverguoja prie skaičiaus b*. Kitaip sakant, kokį skaičių $\varepsilon>0$ benurodytume, sumos $a_1+a_2+\ldots+a_n$ nuokrypa nuo skaičiaus b, pradedant nuo tam tikro numerio N, yra mažesnė už ε:

$$|b-(a_1+\ldots+a_n)|<\varepsilon, \quad \text{kai} \quad n\geqslant N.$$

Tokiu atveju skaičių b vadiname *begalinės eilutės* $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ *suma* ir rašome:

$$b=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

Jei nėra skaičiaus b, prie kurio konverguoja (4) eilutė, tai ta eilutė vadinama *diverguojančia*.

Iš anksčiau atliktojo tyrimo matyti, kad

$$\frac{10}{9}=1+0,1+0,01+\ldots+0,00\ldots01+\ldots,$$

$$2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

tuo tarpu eilutė $1+4+16+\ldots+4^n+\ldots$ diverguoja.

Nuodugniau tirdami, įsitikiname, kad eilutė $1+x+\ldots+x^n+\ldots$, kai $|x|<1$, konverguoja prie $\frac{1}{1-x}$, o kai $|x|\geqslant 1$, tai eilutė diverguoja.

Norint tą teiginį įrodyti, pakanka pastebėti, kad

$$1+x+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

ir kad, neaprėžtai didinant n, reiškinys x^{n+1} artėja prie nulio, jei $|x|<1$; jei $|x|>1$, tai x^{n+1} neaprėžtai didėja. Pagaliau, kai $|x|=1$, t. y. $x=\pm 1$, gauname diverguojančias eilutes $1+1+\ldots+1+\ldots$ ir $1-1+\ldots+1-1+\ldots$

Vadinasi, kai $|x|<1$, galima rašyti lygybę

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+\ldots \qquad (5)$$

Pabrėšime, kad (5) lygybė yra žinoma iš mokyklinio matematikos kurso: pagal ją apskaičiuojama be galo mažėjančios geometrinės progresijos suma.

Išsiaiškinome, kokia prasmė teikiama užrašui

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+\ldots$$

Jis parodo, kad su x reikšmėmis, priklausančiomis tam tikrai sričiai, būtent, kai $|x|<1$, dešinėje pusėje parašytoji eilutė konverguoja prie $\frac{1}{1-x}$. Sakoma, kad funkcija $\frac{1}{1-x}$, kai $|x|<1$, išreiškiama laipsnine eilute $1+ +x+\ldots+x^n+\ldots$

Dabar jau galima išsiaiškinti ir bendresnį klausimą. Sakykime, kad, dalydami daugianarį $f(x)$ iš daugianario $\varphi(x)$, gavome laipsninę eilutę

$$c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots \qquad (6)$$

Pasirodo, kad (6) eilutė su pakankamai mažomis x reikšmėmis konverguoja prie $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Konvergavimo srities matmenys priklauso nuo vardiklio šaknų, t. y. nuo skaičių, kuriuos atitinkančios vardiklio reikšmės lygios nuliui. Būtent, jei vardiklio šaknys yra skaičiai $x_1, \ldots, x_k$, o r – mažiausias iš skaičių $|x_1|, \ldots, |x_k|$, tai eilutė konverguoja srityje, apibūdinamoje nelygybe $|x|<r$. Pavyzdžiui, funkcijos $1-x$ reikšmė lygi nuliui, kai $x=1$; todėl funkcijos $\frac{1}{1-x}$ dėstinys galimas tik tada, kai $|x|<1$. Funkcijos $x^2-7x+ +10$ reikšmės lygios nuliui, kai $x=2$ ir kai $x=5$; todėl funkcijos $\frac{x-1}{x^2-7x+10}$ laipsninė eilutė konverguoja, kai $|x|<2$.

Atkreipsime dėmesį, kad nė viena vardiklio šaknis nėra lygi nuliui: juk sakėme, kad vardiklio laisvasis narys b_0 nėra lygus nuliui, o dėl tos priežasties $\varphi(0)=b_0\neq 0$.

Kitaip sakant, visada egzistuoja nelygybe $|x|<r$ apibūdinama sritis, kurioje teisinga lygybė

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots \qquad (7)$$

Laipsninėmis eilutėmis galima reikšti ne tik algebrines trupmenas, bet ir daugelį kitų funkcijų. Matematinėje analizėje, pavyzdžiui, įrodoma, kad

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \tag{8}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \tag{9}$$

Mums bus svarbus funkcijos e^x dėstinys laipsnine eilute:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{10}$$

Iš (10) formulės matyti, kad

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{11}$$

Imdami pakankamai daug (11) eilutės narių, gauname skaičiaus e artinį pageidaujamu tikslumu. Pirmieji dešimtainiai skaičiaus e ženklai yra tokie:

$$2{,}7182818289045\ldots$$

Pastebėsime, kad (8), (9) ir (10) eilutės konverguoja su visomis x reikšmėmis.

Atkreipsime dėmesį į dar vieną labai svarbų teiginį:

Funkcijos $f(x)$ neįmanoma išreikšti dviem skirtingomis laipsninėmis eilutėmis.

Kitaip sakant, jei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

ir

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

tai

$$a_0 = b_0, \; a_1 = b_1, \; \ldots, \; a_n = b_n, \; \ldots$$

Veiksmai su laipsninėmis eilutėmis

Dabar aptarsime, kaip atliekami veiksmai su laipsninėmis eilutėmis. Sakykime, kad funkcijos $f(x)$ ir $\varphi(x)$ yra išreikštos laipsninėmis eilutėmis:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{12}$$

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots \tag{13}$$

Tada

$$f(x) + \varphi(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots) + (b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots).$$

Pasirodo, kad dešinėje lygybės pusėje parašytuosius dėmenis galima sukeisti vietomis ir sugrupuoti narius su vienodais kintamojo x laipsniais (šis teiginys nėra toks akivaizdus, kaip atrodo iš pirmo žvilgsnio: juk dešinėje lygybės pusėje yra be galo daug dėmenų, o tokiu atveju perstatinėti dėmenis toli gražu ne visada galima). Taip sugrupavus narius, gaunama lygybė

$$f(x) + \varphi(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n + \ldots \tag{14}$$

Dešinėje šios lygybės pusėje parašytoji eilutė vadinama (12) ir (13) laipsninių *eilučių suma*.

Toliau aiškinsimės, kokia laipsnine eilute išreiškiama funkcijų $f(x)$ ir $\varphi(x)$ sandauga. Parašykime:

$$f(x)\varphi(x)=(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots)\times$$
$$\times(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots). \qquad (15)$$

Pasirodo, kad dešinėje (15) lygybės pusėje parašytąsias eilutes galima dauginti panariui kaip daugianarius (šio teiginio įrodymo nepateikiame). Sudarykime eilutę, sudauginę tas eilutes panariui. Ieškomosios eilutės laisvasis narys lygus a_0b_0. Nariai su x gaunami dukart: dauginant a_0 iš b_1x ir a_1x iš b_0. Tų sandaugų suma yra tokia:

$$a_0b_1x+a_1b_0x=(a_0b_1+a_1b_0)x.$$

Visiškai panašiai randame narius su x^2:

$$a_0b_2x^2+a_1b_1x^2+a_2b_0x^2=(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2.$$

Apskritai koeficientas prie x^n išreiškiamas šitaip:

$$a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_kb_{n-k}+\ldots+a_nb_0.$$

Vadinasi,

$$f(x)\varphi(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots+(a_0b_n+\ldots+a_nb_0)x^n+\ldots \qquad (16)$$

Eilutę, parašytą dešinėje (16) lygybės pusėje, vadiname (12) ir (13) *eilučių sandauga*.

Atskiru atveju, daugindami (12) eilutę iš jos pačios, gauname tos eilutės kvadratą:

$$f^2(x)=a_0^2+2a_0a_1x+(a_1^2+2a_0a_2)x^2+2(a_0a_3+a_1a_2)x^3+\ldots \qquad (17)$$

Dabar pažiūrėkime, kaip laipsninė eilutė dalijama iš kitos laipsninės eilutės. Tarkime, kad (13) eilutės laisvasis narys b_0 nelygus nuliui. Įsitikinsime, kad egzistuoja tokia laipsninė eilutė

$$c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots, \qquad (18)$$

kad

$$(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots)(c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots)=$$
$$=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (19)$$

Norėdami tai įrodyti, sudauginkime kairėje (19) lygybės pusėje parašytąsias eilutes. Gausime eilutę

$$b_0c_0+(b_0c_1+b_1c_0)x+\ldots+(b_0c_n+\ldots+b_nc_0)x^n+\ldots$$

Ji sutampa su (12) eilute tada ir tik tada, kai teisingos tokios lygybės

$$b_0 c_0 = a_0,$$

$$b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$b_0 c_n + \dots + b_n c_0 = a_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Tos lygybės sudaro begalinę lygčių sistemą, iš kurios reikia rasti koeficientus $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ Iš pirmosios lygties randame $c_0 : c_0 = \frac{a_0}{b_0}$. Šią c_0 reikšmę parašome antroje lygtyje ir gauname lygtį

$$b_0 c_1 = a_1 - \frac{b_1 a_0}{b_0},$$

iš kurios randame $c_1 : c_1 = \frac{a_1 b_0 - b_1 a_0}{b_0^2}$. Apskritai, apskaičiavus koeficientus $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$, iš lygties

$$b_0 c_n = a_n - b_1 c_{n-1} - \dots - b_n c_0$$

galima rasti c_n. Ta lygtis išsprendžiama, nes $b_0 \neq 0$.

Vadinasi, įrodėme, kad (18) eilutė, tenkinanti (19) sąryšį, egzistuoja. Galima įrodyti, kad ta eilutė gaunama, reiškiant laipsnine eilute funkciją $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Taigi laipsnines eilutes galima sudėti, dauginti ir dalyti (dalyti — tada, kai daliklio laisvasis narys nelygus nuliui). Tie veiksmai atitinka veiksmus su funkcijomis, kurios reiškiamos tomis eilutėmis.

Atkreipsime dėmesį, kad dabar galima kitaip aiškinti dėstinio

$$\frac{a_0 + \dots + a_n x^n}{b_0 + \dots + b_m x^m} = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k + \dots \tag{20}$$

prasmę. Jis reiškia, kad eilutę $c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k + \dots$ gauname, dalydami baigtinę laipsninę eilutę $a_0 + \dots + a_n x^n$ iš baigtinės laipsninės eilutės $b_0 + \dots + b_m x^m$. Kitaip sakant, ta lygybė rodo, kad

$$(b_0 + \dots + b_m x^m)(c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k + \dots) = a_0 + \dots + a_n x^n, \tag{21}$$

kai kairėje lygybės pusėje parašytoji sandauga apibrėžiama pagal (16) formulę.

Laipsninių eilučių taikymas tapatybių įrodymui

Remiantis laipsninių eilučių savybėmis, galima įrodyti daugelį tapatybių. Tam imama kokia nors funkcija ir dviem būdais išreiškiama laipsninėmis eilutėmis. Kadangi funkcija gali būti išreikšta tik viena laipsnine eilute, tai gautųjų laipsninių eilučių koeficientai prie vienodų kintamojo x laipsnių turi sutapti. Iš to ir išplaukia įrodomoji tapatybė.

Imkime, pavyzdžiui, jau mums žinomą dėstinį x laipsniais:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

Keldami abi tos lygybės puses kvadratu, gauname

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)\,x^n+\ldots \qquad (22)$$

Kai x pakeičiame kintamuoju $-x$, turime tokią lygybę:

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-\ldots+(-1)^n(n+1)\,x^n+\ldots \qquad (22')$$

Abi (22) lygybės puses padauginę iš atitinkamų (22') lygybės pusių, gauname

$$\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}=1+[1(-2)+2\cdot 1]\,x+[1\cdot 3+2(-2)+3\cdot 1]\,x^2+$$
$$+\ldots+[1(-1)^n(n+1)+2(-1)^{n-1}n+\ldots+$$
$$+(-1)^n(n+1)\cdot 1]\,x^n+\ldots \qquad (23)$$

Savaime aišku, kad koeficientai prie nelyginių kintamojo x laipsnių lygūs nuliui (kiekvienas to koeficiento dėmuo parašytas du kartus su skirtingais ženklais). Koeficientas prie x^{2n} lygus

$$1\cdot(2n+1)-2\cdot 2n+3\cdot(2n-1)-\ldots+(2n+1)\cdot 1.$$

Funkciją $\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}$ galima išreikšti laipsnine eilute ir kitokiu būdu. Šiuo atveju

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}=\frac{1}{(1-x^2)^2},$$

o funkcijos $\frac{1}{(1-x^2)^2}$ dėstinį galime sudaryti iš (22) lygybės, vietoj x rašydami x^2:

$$\frac{1}{(1-x^2)^2}=1+2x^2+3x^4+\ldots+(n+1)\,x^{2n}+\ldots \qquad (24)$$

Kadangi bet kokią funkciją galima išreikšti tik viena laipsnine eilute, tai (23) dėstinio koeficientas prie x^{2n} turi būti lygus (24) dėstinio koeficientui prie x^{2n}.

$$1\cdot(2n+1)-2\cdot 2n+3\cdot(2n-1)-\ldots+(2n+1)\cdot 1=n+1.$$

Generuojančios funkcijos

Dabar jau galime imtis pagrindinės šio skyriaus temos — generuojančios funkcijos sąvokos. Sakykime, duota kokia nors skaičių seka a_0, a_1, ..., a_n, ... Sudarykime laipsninę eilutę

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

Jei kokioje nors srityje ta eilutė konverguoja prie funkcijos $f(x)$, tai ta funkcija vadinama skaičių seką $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *generuojančia* funkcija.* Pavyzdžiui, iš lygybės

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

matyti, kad funkcija $\frac{1}{1-x}$ yra skaičių seką 1, 1, 1, ..., 1, ... generuojanti funkcija. Iš (22) lygybės sprendžiame, kad funkcija $\frac{1}{(1-x)^2}$ generuoja skaičių seką 1, 2, 3, 4, ..., n, ...

Mums labiausiai rūpi funkcijos, kurios generuoja sekas $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, vienaip ar kitaip susijusias su kombinatorikos uždaviniais. Tiriant tas funkcijas, pavyksta aptikti pačias netikėčiausias šių sekų savybes. Be to, nagrinėsime generuojančių funkcijų sąsają su rekurentinių sąryšių sprendimu.

Niutono formulė

Sudarysime funkciją, kuri generuoja baigtinę skaičių seką $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$.

Iš elementariosios algebros žinome, kad

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

Šios lygybės — tik atskiri atvejai, gaunami iš bendresnės formulės — laipsnio $(a+x)^n$ dėstinio. Laipsnį $(a+x)^n$ parašykime šitaip:

$$(a+x)^n = \underbrace{(a+x)(a+x)\ldots(a+x)}_{n \text{ kartų}}. \qquad (25)$$

Sudauginkime dešinėje tos lygybės pusėje parašytus dvinarius, rašydami daugiklius ta eile, kurią jie sudaro sandaugoje. Pavyzdžiui, $(a+x)^2$ rašysime taip:

$$(a+x)^2 = (a+x)(a+x) = aa + ax + xa + xx, \qquad (26)$$

o $(a+x)^3$ — šitaip:

$$(a+x)^3 = (a+x)(a+x)(a+x) =$$

$$= aaa + aax + axa + axx + xaa + xax + xxa + xxx. \qquad (27)$$

Matome, kad (26) lygybės dešinėje pusėje yra parašyti visi gretiniai su pasikartojimais, sudaryti iš raidžių x ir a, rašant po dvi raides kiekviename gretinyje, o (27) lygybės dešinėje pusėje — gretiniai su pasikartojimais iš tų pačių raidžių, bet po tris raides kiekviename gretinyje.

* Generuoti iš lot. *generare* „gimdyti, kurti". *Vertėjas*

Panašus rezulatatas bus ir bendruoju atveju: *sudauginę (25) reiškinio dvinarius, gausime visus galimus gretinius iš raidžių a ir x su pasikartojimais po n elementų kiekviename gretinyje.*

Dabar sutraukime panašiuosius narius. Nariai panašūs, jei juose yra vienodas skaičius raidžių x (tada raidžių a skaičius irgi vienodas). Išsiaiškinkime, kiek yra narių, kuriuose raidė x parašyta k kartų (raidė a juose bus parašyta $n-k$ kartų). Tie nariai — tai kėliniai su pasikartojimais, sudaryti iš k raidžių x ir $n-k$ raidžių a. Todėl pagal II skyriaus (5) formulę tokių narių skaičius lygus

$$P(k,\ n-k)=C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Iš to aišku, kad, sutraukus panašiuosius narius, sandauga $x^k a^{n-k}$ turės koeficientą $C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Vadinasi, įrodėme, kad

$$(a+x)^n=C_n^0 a^n+C_n^1 a^{n-1}x+\ldots+C_n^k a^{n-k}x^k+\ldots+C_n^n x^n. \quad (28)$$

Šią lygybę dažniausiai vadiname Niutono formule. Kai joje vietoj a parašome 1, gauname

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1 x+\ldots+C_n^k x^k+\ldots+C_n^n x^n. \quad (29)$$

Matome, kad $(1+x)^n$ yra funkcija, generuojanti skaičius C_n^k $(k=0, 1, \ldots, n)$.

Naudojantis šita generuojančia funkcija, gana lengva tirti įvairias skaičių C_n^k savybes, kurias anksčiau išsiaiškinome labai sudėtingais samprotavimais.

Pirmiausia įrodysime, kad

$$C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}. \quad (30)$$

Tam užtenka abi (29) lygybės puses padauginti iš $1+x$. Tada gausime lygybę

$$(1+x)^{n+1}=(C_n^0+C_n^1 x+\ldots+C_n^k x^k+\ldots+C_n^n x^n)(1+x).$$

Kairėje pusėje parašytąjį laipsnį vėl galima išdėstyti pagal Niutono formulę, tik toje formulėje vietoj n reikia rašyti $n+1$. Todėl koeficientas prie x^k bus C_{n+1}^k. Padauginę dešinėje parašytą daugianarį iš dvinario $1+x$, gausime du narius su x^k: pirmasis bus nario $C_n^k x^k$ ir 1 sandauga, antrasis — nario $C_n^{k-1}x^{k-1}$ ir x sandauga. Todėl koeficientas prie x^k dešinėje bus $C_n^k+ +C_n^{k-1}$. Kadangi kairėje ir dešinėje turi būti tas pats daugianaris, tai koeficientai prie x^k kairėje ir dešinėje turi būti vienodi. Iš to ir išplaukia lygybė $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$.

Ją išvedėme 39 puslapyje, bet samprotauti teko sudėtingai. Tame pačiame puslapyje irgi gana sudėtingai buvo įrodyta, kad

$$2^n=C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^k+\ldots+C_n^n. \quad (31)$$

Iš (29) formulės šią lygybę gauname iš karto: vietoj x parašome 1. Jei (29) lygybėje vietoj x parašysime -1, tai gausime

$$0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^k C_n^k+\ldots+(-1)^n C_n^n.$$

Kitaip sakant, *skaičių C_n^k su lyginiais k suma yra lygi skaičių C_n^k su nelyginiais k sumai*:

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^{2m}+\ldots=C_n^1+C_n^3+\ldots+C_n^{2m+1}+\ldots \quad (32)$$

Abi tos sumos turi baigtinį skaičių dėmenų: jos nutrūksta, kai $2m$ arba $2m+1$ pasidaro didesnis už n.

Įdomus rezultatas gaunamas, kai (29) lygybėje $n=4m$, o vietoj x parašomas i. Paprastu skaičiavimu įsitikiname, kad $(1+i)^4=-4$. Todėl $(1+i)^{4m}=(-4)^m$. Vadinasi, turime lygybę

$$(-4)^m=C_{4m}^0+C_{4m}^1 i+C_{4m}^2 i^2+C_{4m}^3 i^3+C_{4m}^4 i^4+\ldots+C_{4m}^{4m} i^{4m}=$$

$$=C_{4m}^0+C_{4m}^1 i-C_{4m}^2-C_{4m}^3 i+C_{4m}^4+\ldots+C_{4m}^{4m}.$$

Atskyrę šioje lygybėje realiąją dalį nuo menamosios, gauname dvi tapatybes:

$$C_{4m}^1-C_{4m}^3+C_{4m}^5-\ldots-C_{4m}^{4m-1}=0, \quad (33)$$

$$C_{4m}^0-C_{4m}^2+C_{4m}^4+\ldots+C_{4m}^{4m}=(-4)^m. \quad (34)$$

Skaitytojui siūlome išsiaiškinti, kokias tapatybes gausime, kai $n=4m+$ $+1$, $4m+2$, $4m+3$.

Remiantis generuojančia funkcija, lengva išvesti ir lygybę

$$C_{n+m}^s=C_n^0 C_m^s+C_n^1 C_m^{s-1}+\ldots+C_n^k C_m^{s-k}+\ldots+C_n^n C_m^{s-n} \quad (35)$$

(kai $s-k<0$, susitariama, kad $C_m^{s-k}=0$; todėl iš tikrųjų k kinta nuo 0 iki mažesniojo iš skaičių m, n). Šios lygybės išvedimui reikia parašyti du dėstinius:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1 x+\ldots+C_n^k x^k+\ldots+C_n^n x^n$$

ir

$$(1+x)^m=C_m^0+C_m^1 x+\ldots+C_m^s x^s+\ldots+C_m^m x^m$$

ir sudauginti jų kairiąsias ir dešiniąsias puses:

$$(1+x)^{n+m}=(C_n^0+C_n^1 x+\ldots+C_n^k x^k+\ldots+C_n^n x^n)\times$$

$$\times(C_m^0+C_m^1 x+\ldots+C_m^s x^s+\ldots+C_m^m x^m).$$

Paskui kairei pusei pritaikome Niutono formulę (su rodikliu $n+m$), o dešinėje sudauginame parašytuosius daugianarius. Palyginę koeficientus prie x^s kairėje ir dešinėje, gauname (35) lygybę. Tos lygybės atskiras atvejis (kai $n=m$) yra

$$C_{2n}^n=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2 \quad (35')$$

(primename, kad $C_n^k=C_n^{n-k}$).

Polinominė formulė

Taikydami Niutono formulę, galime išdėstyti ir sudėtingesnius reiškinius, pavyzdžiui, $(x+y+z)^4$:

$$(x+y+z)^4=[(x+y)+z]^4=$$
$$=(x+y)^4+C_4^1(x+y)^3z+C_4^2(x+y)^2z^2+C_4^3(x+y)z^3+C_4^4z^4.$$

Dabar laipsnius $(x+y)^4$, $(x+y)^3$, $(x+y)^2$ vėl išdėstome pagal Niutono formulę. Tada gauname

$$(x+y+z)^4=x^4+y^4+z^4+4x^3y+4x^3z+4xy^3+4y^3z+4xz^3+4yz^3+$$
$$+6x^2y^2+6x^2z^2+6y^2z^2+12x^2yz+12xy^2z+12xyz^2. \quad (36)$$

Tačiau šis metodas pernelyg sudėtingas. Jį taikant, sunku iš karto atsakyti, pavyzdžiui, į tokį klausimą: su kokiu koeficientu laipsnio $(x+$ $+y+z)^9$ dėstinyje parašyta sandauga $x^2y^4z^3$? Todėl pageidautina išvesti formulę, iš kurios betarpiškai matytume, kaip išdėstomas reiškinys

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n. \quad (37)$$

Tą formulę nesunku atspėti. Išvesdami Niutono formulę, matėme, kad laipsnio $(a+x)^n$ dėstinyje sandauga x^ka^{n-k} turi koeficientą $P(k, n-k)$. Todėl galime manyti, kad laipsnio $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$ dėstinyje sandaugos $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$ koeficientas bus $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Tuoj pat įsitikinsime, kad neapsirikome.

Iš tikrųjų laipsnį $(x_1+x_2+\ldots x_m)^n$ išreiškę n vienodų daugianarių sandauga, atliksime daugybą, nekeisdami dauginamųjų eilės. Savaime aišku, kad tokiu būdu gausime visus galimus gretinius su pasikartojimais, sudarytus iš raidžių x_1, x_2, ..., x_m taip, kad kiekviename gretinyje būtų n raidžių. Tačiau iš kai kurių gretinių gausime panašius narius. Taip atsitiks, kai viename gretinyje kiekviena raidė bus parašyta tiek pat kartų, kiek ir kitame. Todėl, norint rasti koeficientą prie sandaugos $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$, reikia apskaičiuoti, kiek yra gretinių su pasikartojimais, kuriuose k_1 kartų parašyta raidė x_1, k_2 kartų — raidė x_2, ..., k_m kartų — raidė x_m. Aišku, kad kiekvienas toks gretinys yra kėlinys su pasikartojimais iš k_1 raidžių x_1, k_2 raidžių x_2, ..., k_m raidžių x_m. Tokių kėlinių skaičių žymėdavome simboliu $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Vadinasi, (37) reiškinio dėstinyje sandauga $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$ turės koeficientą $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ (savaime aišku, kad čia $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$: juk kiekviename dėstinio naryje yra po vieną elementą iš kiekvieno skliausto, o suskliaustųjų daugianarių skaičius lygus n).

Formulę, kurios teisingumą čia įrodinėjome, galima parašyti taip:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\Sigma P(k_1, k_2, \ldots, k_m)x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}; \quad (38)$$

sumuojama pagal visus galimus skaičiaus n skirstinius į m sveikų neneigiamų dėmenų sumą $k_1+k_2+\ldots+k_m$. Primename, kad

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m)=\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!}. \qquad (39)$$

Aišku, jei skaičiai $s_1, \ldots, s_m$ gaunami iš skaičių $k_1, \ldots, k_m$, pastaruosius sukeičiant vietomis, tai $P(s_1, \ldots, s_m)=P(k_1, \ldots, k_m)$. Todėl, pavyzdžiui, 36 dėstinyje sandaugos x^2yz ir xyz^2 turi vienodus koeficientus. Ši pastaba palengvina (37) dėstinio koeficientų rašymą: pakanka apskaičiuoti koeficientus, atitinkančius tokius skirstinius $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$, kuriuose $k_1\geqslant k_2\geqslant\ldots\geqslant k_m$, po to rodiklius visais galimais būdais keisti vietomis.

Pavyzdžiui, išdėstysime trinario laipsnį $(x+y+z)^5$. Jei nekreipiama dėmesio į dėmenų eilę, tai skaičių 5 išreikšti trijų dėmenų suma galima penkiais būdais:

$$5=5+0+0,\ 5=4+1+0,\ 5=3+2+0,\ 5=3+1+1,\ 5=2+2+1.$$

Kadangi $P(5, 0, 0)=1$, $P(4, 1, 0)=5$, $P(3, 2, 0)=10$, $P(3, 1, 1)=20$, $P(2, 2, 1)=30$, tai

$$(x+y+z)^5=x^5+y^5+z^5+5x^4y+5xy^4+5x^4z+5xz^4+$$
$$+5y^4z+5yz^4+10x^3y^2+10x^2y^3+10x^3z^2+$$
$$+10x^2z^3+10y^3z^2+10y^2z^3+20x^3yz+20xy^3z+$$
$$+20xyz^3+30x^2y^2z+30x^2yz^2+30xy^2z^2.$$

Iš (38) formulės lengvai išvedamos kai kurios skaičių $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ savybės. Pavyzdžiui, kai toje formulėje parašome $x_1=x_2=\ldots=x_m=1$, gauname lygybę

$$m^n=\Sigma P(k_1, \ldots, k_m). \qquad (40)$$

Čia sumuojama pagal visus skaičiaus n skirstinius į m sveikų neneigiamų dėmenų sumą: $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$, atsižvelgiant į dėmenų eilę.

Abi (38) lygybės puses padauginus iš $x_1+x_2+\ldots+x_m$, kairėje pusėje pritaikius analogišką dėstinį (su rodikliu $n+1$), o dešinėje sudauginus daugianarius, gaunamas toks rekurentinis skaičių $P(k_1, \ldots, k_m)$ sąryšis:

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m)=P(k_1-1, k_2, \ldots, k_m)+$$
$$+P(k_1, k_2-1, \ldots, k_m)+\ldots+P(k_1, k_2, \ldots, k_m-1). \qquad (41)$$

Jei atitinkamai sudaugintume reiškinius, parašytus lygybių

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\Sigma P(k_1, k_2, \ldots, k_m)\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$$

ir

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^s=\Sigma P(l_1, l_2, \ldots, l_m)\,x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_m^{l_m}$$

kairėje ir dešinėje, ir palygintume abiejose pusėse sandaugos $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_m^{r_m}$ koeficientus, tai gautume tapatybę

$$P(r_1, r_2, \ldots, r_m) = \sum_{k_p + l_p = r_p} P(k_1, k_2, \ldots, k_m) P(l_1, l_2, \ldots, l_m). \quad (42)$$

Čia dešinėje pusėje sumuojama pagal visus sveikus neneigiamus skaičius $k_1, k_2, \ldots, k_m$; $l_1, l_2, \ldots, l_m$, kurių sumos lygios n : $k_1, +k_2 + \ldots + k_m = n$, $l_1 + l_2 + \ldots + l_m = n$ ir, be to, $k_1 + l_1 = r_1$, $k_2 + l_2 = r_2$, ..., $k_m + l_m = r_m$. Siūlome skaitytojui detaliai atlikti atitinkamus samprotavimus.

Savaime aišku, kad (40), (41) ir (42) formules galima išvesti ir be (38) generuojančios funkcijos. Bet tuo atveju reikėtų samprotauti geometriškai, kaip buvo samprotaujama 101 puslapyje, tik dabar tektų naudoti ne plokštumą, o n-matę erdvę. Pritaikius generuojančią funkciją, tos tapatybės išvedamos automatiškai, darant tik nesudėtingus algebrinius pertvarkymus.

Niutono eilutė

Formulę dvinario laipsniui $(a+x)^n$ išreikšti, kaip įprasta mokykloje, pavadinome *Niutono formule*. Matematikos istorijos požiūriu šis pavadinimas neteisingas. Formulė laipsniui $(a+x)^n$ išreikšti buvo gerai pažįstama Omarui Chajamui, Gijasedinui ir kitiems Vidurinės Azijos matematikams. Vakarų Europoje gerokai anksčiau už Niutoną ją vartojo Blezas Paskalis. Niutono nuopelnas yra kitokio pobūdžio — jam pavyko laipsnio $(a+x)^n$ formulę pritaikyti, kai n nėra natūrinis skaičius. Jis įrodė: *jei a — teigiamas skaičius ir $|x| < a$, tai su bet kokia realia α reikšme bus teisinga tokia lygybė:*

$$(x+a)^\alpha = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} a^{\alpha-2} x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} a^{\alpha-k} x^k + \ldots \quad (43)$$

Tokiu atveju gauname ne daugianarį, o begalinę eilutę. Kai $\alpha = n$ — natūrinis skaičius, skirtumas $\alpha - n = n - n$ lygus nuliui. Kadangi tas skirtumas yra visų narių, pradedant $(n+2)$-ju, koeficientuose, tai visi tie dėstinio nariai lygūs nuliui. Todėl (43) eilutė, kai rodiklis yra natūrinis skaičius n, virsta daugianariu.

Neįrodinėsime, kad (43) formulė yra teisinga su bet kokia rodiklio α reikšme, o tik ištirsime atvejį, kai α — sveikas neigiamas skaičius: $\alpha = -n$. Tuo atveju norimoji įrodyti formulė yra šitokia:

$$(x+a)^{-n} = a^{-n} - n a^{-n-1} x + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^{-n-2} x^2 -$$

$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{-n-3} x^3 + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \ldots k} a^{-n-k} x^k + \ldots \quad (44)$$

Tą lygybę galima parašyti ir kitaip:

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-n}=1-C_n^1\left(\frac{x}{a}\right)+C_{n+1}^2\left(\frac{x}{a}\right)^2-$$
$$-C_{n+2}^3\left(\frac{x}{a}\right)^3+\ldots+(-1)^k C_{n+k-1}^k\left(\frac{x}{a}\right)^k+\ldots \qquad (44')$$

$\left(\text{juk } C_{n+k-1}^k=\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\right)$.

Kad būtų patogiau samprotauti, vietoj $\frac{x}{a}$ parašysime — t, t. y. vietoj (44) lygybės įrodinėsime tokią lygybę:

$$(1-t)^{-n}=1+C_n^1 t+C_{n+1}^2 t^2+\ldots+C_{n+k-1}^k t^k+\ldots \qquad (45)$$

Įrodymui pritaikysime indukcijos metodą n atžvilgiu. Jei $n=1$, tai $C_{n+k-1}^k= =C_k^k=1$; todėl šiuo atveju nagrinėjamasis sąryšis yra toks:

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\ldots+t^k+\ldots \qquad (46)$$

Ta lygybė — žinoma formulė be galo mažėjančios geometrinės progresijos sumai apskaičiuoti $\left(\text{primename, kad } |t|=\left|\frac{x}{a}\right|<1\right)$.

Dabar tarsime, kad (45) lygybė jau įrodyta, ir įsitikinsime, kad iš jos išplaukia lygybė

$$(1-t)^{-n-1}=1+C_{n+1}^1 t+C_{n+2}^2 t^2+\ldots+C_{n+k}^k t^k+\ldots \qquad (47)$$

Abi įrodomosios (47) lygybės puses padauginkime iš $1-t$. Jei po to gausime teisingą lygybę, tai ir (47) lygybė bus teisinga. Tačiau, padauginę iš $1-t$, gauname

$$(1-t)^{-n}=[1+C_{n+1}^1 t+C_{n+2}^2 t^2+\ldots+C_{n+k-1}^{k-1} t^{k-1}+C_{n+k}^k t^k+\ldots]\ (1-t).$$

Dešinėje pusėje atliksime daugybą ir sutrauksime panašiuosius narius. Dėmenys su laipsniu t^k sandaugoje bus parašyti du kartus: $C_{n+k}^k t^k$ sudauginus su 1 ir $C_{n+k-1}^{k-1} t^{k-1}$ sudauginus su $-t$. Todėl koeficientas prie t^k dešinėje pusėje lygus

$$C_{n+k}^k-C_{n+k-1}^{k-1}=C_{n+k-1}^k$$

(žr. (11) formulę 39 puslapyje).

Pagal indukcijos prielaidą laipsnio $(1-t)^{-n}$ dėstinio koeficientas prie t^k kaip tik lygus C_{n+k-1}^k. Kadangi, padauginus iš $1-t$, gaunama teisinga lygybė, tai įrodomoji (45) lygybė irgi teisinga.

Jei skaitytojas nenori eiti nuo įrodomosios lygybės prie žinomo sąryšio, laikydamas geresniu priešingą kelią, tai jam reikia abi (45) lygybės puses dauginti iš atitinkamų (46) lygybės pusių. Tada gautų lygybę

$$(1-t)^{-n-1}=(1+C^1 t+C_{n+1}^2 t^2+\ldots+C_{n+k-1}^k t^k+\ldots)\times$$
$$\times(1+t+t^2+\ldots+t^k+\ldots).$$

Dešinėje reikia sudauginti eilutes ir pasinaudoti tapatybe

$$C_{n-1}^0+C_n^1+C_{n+1}^2+\ldots+C_{n+k-1}^k=C_{n+k}^k$$

(žr. p. 40). Gautume (47) sąryšį.

Vadinasi, įrodėme, kad (45) lygybė yra teisinga. Dar kartą primename, kad ja galima remtis tik tada, kai $|t|<1$. Jei neatsargus skaitytojas pamėgintų vietoj t abiejose tos lygybės pusėse parašyti -1 ir šitaip išvestų „nuostabią“ formulę

$$\frac{1}{2^n}=1-C_n^1+C_{n+1}^2-C_{n+2}^3+\ldots+(-1)^k C_{n+k-1}^k+\ldots, \qquad (48)$$

tai jis padarytų didelę klaidą: dešinėje pusėje parašytoji sveikųjų skaičių suma jokiu būdu negali būti lygi trupmeniniam skaičiui $\frac{1}{2^n}$.

XVIII amžiuje, kai begalinių eilučių teorija dar nebuvo pakankamai ištirta, tokias klaidas darė net garsūs matematikai. Reikėjo ištisus dešimtmečius įtemptai dirbti, norint griežtai išsiaiškinti, kas yra begalinės eilutės suma, kada ji egzistuoja, o kada ne. Beje, reikia pasakyti, kad XIX amžiaus pabaigoje begalinės eilutės sumos sąvoką labai apibendrino, todėl yra ir tokių apibrėžimų, kurie įteisina (48) lygybę. Tačiau šių klausimų nenagrinėsime.

Palyginę ką tik išvestąjį dėstinį

$$(1+t)^{-n}=1-C_n^1 t+C_{n+1}^2 t^2-\ldots+(-1)^k C_{n+k-1}^k t^k+\ldots \qquad (49)$$

su lygybe

$$(1+t)^n=1+C_n^1 t+C_n^2 t^2+\ldots+C_n^k t^k+\ldots+t^n, \qquad (50)$$

vėl gauname išvadą, kad, apibendrinant simbolį C_n^k neigiamoms n reikšmėms, reikia rašyti

$$C_{-n}^k=(-1)^k C_{n+k-1}^k$$

(žr. p. 94). Kai k reikšmės yra neigiamos, C_n^k reikia laikyti lygiu nuliui, nes (49) ir (50) dėstiniuose nėra kintamojo t laipsnių su neigiamais rodikliais. Iš tų pačių samprotavimų išeina, kad $C_n^k=0$, kai $0\leqslant n<k$.

Kvadratinių šaknų traukimas

Įrodėme, kad Niutono formulė yra teisinga, kai rodiklis — bet koks sveikasis skaičius. Bet, kaip jau sakyta, ta formulė yra teisinga ne tik tada, kai rodiklis — sveikasis skaičius, bet ir tada, kai rodiklis — trupmeninis (ir net iracionalusis) skaičius. Šitų atvejų smulkiau nenagrinėsime, tik parašysime dėstinius, atitinkančius $n=\frac{1}{2}$ ir $n=-\frac{1}{2}$.

Kai $n=\frac{1}{2}$, Niutono formulė rašoma šitaip:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+$$

$$+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{1\cdot 2\ldots k}x^k+\ldots \qquad (51)$$

Šį reiškinį sutvarkius, gaunama tokia lygybė:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\ldots+$$

$$+(-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\ldots(2k-3)}{2\cdot 4\ldots 2k}x^k+\ldots$$

Kai $n=-\frac{1}{2}$, visiškai panašiai įsitikiname, kad

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\ldots+$$

$$+(-1)^k\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}x^k+\ldots \tag{52}$$

Išvestąsias formules galima parašyti ir kitaip. Pastebėsime, kad

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}=\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}=\frac{1}{2^{2k}}C_{2k}^k.$$

Todėl

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^2}C_2^1x+\frac{1}{2^4}C_4^2x^2-\ldots+\frac{(-1)^k}{2^{2k}}C_{2k}^kx^k\ldots \tag{53}$$

Visiškai panašiai įsitikiname, kad

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 2^3}C_2^1x^2+\frac{1}{3\cdot 2^5}C_4^2x^3-\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}C_{2k-2}^{k-1}x^k+\ldots \tag{54}$$

Šios eilutės konverguoja, kai $|x|<1$. Jas taikydami, galime bet kokiu tikslumu traukti kvadratines šaknis. Pavyzdžiui,

$$\sqrt{30}=\sqrt{25+5}=5\sqrt{1+0{,}2}=5(1+0{,}2)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=5\left[1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}2-\frac{1}{2\cdot 4}\cdot 0{,}2^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 0{,}2^3-\ldots\right]=5{,}4775\ldots$$

Tačiau mums rūpi ne tų formulių taikymas kvadratinių šaknų traukimui, o binominių koeficientų sąryšiai, kurie išplaukia iš gautųjų dėstinių. Tiems sąryšiams išvesti abi (53) lygybės puses pakelkime kvadratu. Remdamiesi laipsninių eilučių dauginimo taisykle, įsitikiname, kad dešinėje pusėje eilutės koeficientas prie x^k yra toks:

$$\frac{(-1)^k}{2^{2k}}\left[C_{2k}^k+C_2^1C_{2k-2}^{k-1}+C_4^2C_{2k-4}^{k-2}+\ldots+C_{2k}^k\right].$$

Kairėje tos lygybės pusėje gauname

$$\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right]^2=\frac{1}{1+x}.$$

Tačiau mes žinome, kad

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^k x^k+\ldots$$

Palyginę laipsnių x^k koeficientus abiejose lygybės pusėse, gauname tapatybę

$$C_{2k}^k+C_2^1C_{2k-2}^{k-1}+C_4^2C_{2k-4}^{k-2}+\ldots+C_{2k}^k=2^{2k}. \quad (55)$$

Panašiai samprotaudami, iš (54) lygybės išvedame tapatybę

$$\frac{C_{2k-4}^{k-2}}{1\cdot(k-1)}+\frac{C_2^1C_{2k-6}^{k-3}}{2\cdot(k-2)}+\frac{C_4^2C_{2k-8}^{k-4}}{3\cdot(k-3)}+\ldots+\frac{C_{2k-4}^{k-2}}{(k-1)\cdot 1}=\frac{C_{2k-2}^{k-1}}{k}, \quad (56)$$

kuri teisinga, kai $k\geqslant 2$.

Paskui, panariui daugindami (53) dėstinį iš (54), gauname

$$1=\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 2^3}C_2^1x^2+\frac{1}{3\cdot 2^5}C_4^2x^3-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}C_{2k-2}^{k-1}x^k+\ldots\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{2^2}C_2^1x+\frac{1}{2^4}C_4^2x^2-\ldots+\frac{(-1)^k}{2^{2k}}C_{2k}^kx^k+\ldots\right). \quad (57)$$

Tos lygybės dešinėje pusėje sudauginame skliaustuose parašytąsias eilutes ir gauname naują laipsninę eilutę. Iš (57) lygybės matyti, kad visi tos eilutės koeficientai (išskyrus laisvąjį narį) lygūs nuliui. Iš to gauname tapatybę

$$C_{2k-2}^{k-1}+\frac{1}{2}C_2^1C_{2k-4}^{k-2}+\frac{1}{3}C_4^2C_{2k-6}^{k-3}+\ldots+\frac{1}{k}C_{2k-2}^{k-1}=\frac{1}{2}C_{2k}^k, \quad (58)$$

teisingą, kai $k\geqslant 1$.

Pagaliau pastebėkime, kad

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Todėl

$$\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 2^3}C_2^1x^2+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}C_{2k-2}^{k-1}x^k+\ldots\right)\times$$

$$\times(1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^kx^k+\ldots)=$$

$$=1-\frac{1}{2^2}C_2^1x+\frac{1}{2^4}C_4^2x^2-\ldots+\frac{(-1)^k}{2^{2k}}C_{2k}^kx^k+\ldots$$

Kairėje tos lygybės pusėje sudauginame eilutes ir, palyginę koeficientus prie x^k abiejose pusėse, gauname tapatybę

$$1-\frac{1}{2\cdot 2^2}C_2^1-\frac{1}{3\cdot 2^4}C_4^2-\ldots-\frac{1}{k\cdot 2^{2k-2}}C_{2k-2}^{k-1}=\frac{1}{2^{2k-1}}C_{2k}^k. \quad (59)$$

Generuojančios funkcijos ir rekurentiniai sąryšiai

Jau sakėme, kad generuojančių funkcijų teorija glaudžiai siejasi su rekurentiniais sąryšiais. Grįžkime vėl prie daugianario dalybos iš daugianario. Sakykime, kad

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

ir

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$$

— du daugianariai ir kad $b_0\neq0$. Be to, tarsime, kad $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ — taisyklinga algebrinė trupmena (priešingu atveju iš jos visada galima išskirti sveikąją dalį).

Žinome, kad tuo atveju, kai

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots, \tag{60}$$

turi būti teisinga tapatybė

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=$$
$$=(b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m)(c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots).$$

Tos tapatybės dešinėje pusėje daugianarį padauginame iš laipsninės eilutės ir palyginame koeficientus prie vienodų kintamojo x laipsnių kairėje ir dešinėje. Iš pradžių gauname m tokių sąryšių

$$b_0c_0=a_0,$$
$$b_0c_1+b_1c_0=a_1,$$
$$b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0=a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_0c_{m-1}+b_1c_{m-2}+\ldots+b_{m-1}c_0=a_{m-1} \tag{61}$$

(jei $n<m-1$, tai $a_{n+1}=\ldots=a_{m-1}=0$). Visi tolesni sąryšiai bus vienodo pavidalo:

$$b_0c_{m+k}+b_1c_{m+k-1}+\ldots+b_mc_k=0,\quad (k=0,\ 1,\ \ldots) \tag{62}$$

(juk daugianaryje $f(x)$ nėra narių su laipsniais x^m, x^{m+1} ir t. t.). Vadinasi, (60) eilutės koeficientai $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ tenkina (62) rekurentinį sąryšį. To sąryšio koeficientai priklauso tik nuo trupmenos vardiklio. Trupmenos skaitiklis reikalingas tik pirmiesiems rekurentinės sekos nariams $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ apskaičiuoti.

Atvirkščiai, kai duotas (62) rekurentinis sąryšis ir pasakyti skaičiai $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$, pirmiausia pagal (61) formules apskaičiuojame $a_0, \ldots, a_{m-1}$. Tada skaičių seką $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ generuojanti funkcija bus algebrinė trupmena

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}. \tag{63}$$

Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad mažai ką laimime, rekurentinį sąryšį pakeisdami generuojančia funkcija: juk vis tiek reikės skaitiklį dalyti iš vardiklio, o iš to gausime tą patį (62) rekurentinį sąryšį. Tačiau (63) trupmeną galima tapačiai pertvarkyti, o tai palengvina skaičių c_k radimą.

Reiškimas elementariosiomis trupmenomis

Dabar parodysime, kad, tapačiai pertvarkant generuojančią funkciją, galima spręsti rekurentinius sąryšius. Sakykime, kad (63) trupmenos vardiklis suskaidytas pirmojo laipsnio dauginamaisiais:

$$\varphi(x) = b_m (x-\alpha_1)^r \ldots (x-\alpha_k)^s.$$

Pabrėžiame, kad, norint tai padaryti, reikia išspręsti lygtį $b_0 + \ldots + b_m x^m = 0$, t.y. charakteringąją (62) sąryšio lygtį.

Tada aišku, kad (63) trupmena yra gauta, sudėjus tokias elementariąsias trupmenas:

$$\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)^r}, \quad \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^{r-1}}, \ldots, \frac{A_{1,\,r-1}}{x-\alpha_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{A_{k1}}{(x-\alpha_k)^s}, \quad \frac{A_{k2}}{(x-\alpha_k)^{s-1}}, \ldots, \frac{A_{k,\,s-1}}{x-\alpha_k}.$$

Kitaip sakant,

$$\frac{a_0 + \ldots + a_{m-1}x^{m-1}}{b_m (x-\alpha_1)^r \ldots (x-\alpha_k)^s} = \frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)^r} + \ldots + \frac{A_{1,\,r-1}}{x-\alpha_1} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_{k1}}{(x-\alpha_k)^s} + \ldots + \frac{A_{k,\,s-1}}{x-\alpha_k}. \qquad (64)$$

Čia kol kas nežinomi tik koeficientai $A_{11}, \ldots, A_{k,\,s-1}$. Norint juos apskaičiuoti, reikia abi (64) lygybės puses padauginti iš vardiklio $b_m(x—\alpha_1)^r \ldots (x—\alpha_k)^s$, atidaryti skliaustus ir palyginti koeficientus prie vienodų x laipsnių. Iš gautosios lygčių sistemos rasime ieškomuosius koeficientus.

Kartais pavyksta išvengti lygčių sistemos sprendimo. Išdėstykime, pavyzdžiui, trupmeną

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

Kadangi $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2—1)(x^2—4) = (x—1)(x+1)(x—2)(x+2)$, tai ieškomasis dėstinys turi būti šitoks:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}.$$

Abi lygybės puses padauginę iš bendrojo vardiklio, gauname

$$x^3 - 2x^2 + 6x + 1 = A(x+1)(x-2)(x+2) +$$
$$+ B(x-1)(x-2)(x+2) + C(x-1)(x+1)(x+2) +$$
$$+ D(x-1)(x+1)(x-2).$$

Tą lygybę turi tenkinti bet kokios kintamojo x reikšmės. Kai $x=1$, visi dešinėje pusėje parašyti dėmenys, išskyrus pirmąjį, lygūs nuliui. Todėl $-6A=6$, o iš čia $A=-1$. Panašiai, vietoj x paeiliui rašydami -1, 2 ir -2, sužinome, kad $B=-\frac{4}{3}$, $C=\frac{13}{12}$, $D=\frac{9}{4}$. Vadinasi,

$$\frac{x^3-2x^2+6x+1}{x^4-5x^2+4}=-\frac{1}{x-1}-\frac{4}{3(x+1)}+\frac{13}{12(x-2)}+\frac{9}{4(x+2)}. \qquad (65)$$

Trupmenos $\frac{A}{(x-\alpha)^r}$ dėstinį parašome pagal Niutono formulę. Pavyzdžiui,

$$\frac{13}{12(x-2)}=-\frac{13}{24}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}=$$

$$=-\frac{13}{24}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right).$$

Tokiu pat būdu išdėstę kitas elementariąsias trupmenas, parašytas (65) lygybėje, gauname

$$\frac{x^3-2x^2+6x+1}{x^4-5x^2+4}=(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)-$$

$$-\frac{4}{3}\left(1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots\right)-$$

$$-\frac{13}{24}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{9}{8}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right).$$

Sugrupavę narius su vienodais kintamojo x laipsniais, įsitikiname, kad koeficientas prie x^n išreiškiamas šitaip:

$$c_n=1-\frac{4}{3}(-1)^n-\frac{13}{24\cdot 2^n}+\frac{9(-1)^n}{8\cdot 2^n}.$$

Jau sakėme, kad algebrinės trupmenos išreiškimas laipsnine eilute yra ekvivalentus atitinkamo rekurentinio sąryšio su nurodytomis pradinėmis sąlygomis sprendimui. Vadinasi, trupmenas išreikšdami elementariųjų trupmenų suma ir tas elementariąsias trupmenas išdėstydami laipsninėmis eilutėmis, galime spręsti tiesinius rekurentinius sąryšius su pastoviais koeficientais.

Taigi, kai duotas (62) rekurentinis sąryšis ir pasakyti skaičiai $c_0, \ldots, c_{m-1}$, iš pradžių reikia pagal (61) formules apskaičiuoti $a_0, \ldots, a_{m-1}$. Šitie skaičiai yra trupmenos

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots$$

skaitiklyje parašyto daugianario koeficientai. Tos trupmenos vardiklis yra daugianaris $b_0+\ldots+b_mx^m$.

Sudarytąją trupmeną $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ reikia išreikšti elementariųjų trupmenų suma, o jas — laipsninėmis eilutėmis (pagal Niutono formulę). Gautosios eilutės koeficientas prie x^k ir bus c_k reikšmė.

Išspręsime, pavyzdžiui, rekurentinį sąryšį

$$c_{k+2}-5c_{k+1}+6c_k=0 \tag{66}$$

su pradinėmis sąlygomis $c_0=1$, $c_1=-2$. Šiuo atveju $b_0=1$, $b_1=-5$, $b_2=6$. Pagal (61) formules apskaičiuojame a_0 ir a_1:

$$a_0=b_0c_0=1, \quad a_1=b_0c_1+b_1c_0=-7.$$

Vadinasi, trupmenos $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots$ skaitiklis lygus $1-7x$. Tos trupmenos vardiklį iš karto parašome pagal (66) lygybę: tai daugianaris x^2-5x+6. Todėl, norint rasti (66) sąryšio sprendinį, reikia trupmeną

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6}$$

išreikšti laipsnine eilute. Kadangi $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, tai

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6}=\frac{1-7x}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}.$$

Abi tos lygybės puses padauginę iš bendrojo vardiklio, gauname

$$1-7x=A(x-3)+B(x-2).$$

Vietoj x iš pradžių rašydami 2, o paskui 3, sužinome, kad $A=13, B=-20$. Vadinasi,

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6}=\frac{13}{x-2}-\frac{20}{x-3}=-\frac{13}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}+\frac{20}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}=$$

$$=-\frac{13}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right)+\frac{20}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\ldots+\frac{x^n}{3^n}+\ldots\right).$$

Todėl

$$c_n=-\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{3^n}=-\frac{13}{2^{n+1}}+\frac{20}{3^{n+1}}.$$

Apie vieną netiesinį rekurentinį sąryšį

Spręsdami sekos skirstymo uždavinį, buvome gavę rekurentinį sąryšį

$$T_n=T_0T_{n-1}+T_1T_{n-2}+\ldots+T_{n-1}T_0, \tag{67}$$

$T_0=1$ (žr. p. 118). Ta sąryšį sprendėme labai nenatūraliu metodu — uždavinį pakeitėme eilės uždaviniu (žr. p. 64), kurį jau buvome išsprendę. Pats eilės uždavinys irgi buvo sprendžiamas labai griozdiškai.

Dabar parodysime, kaip betarpiškai sprendžiamas (67) sąryšis. Sudarykime generuojančią funkciją

$$f(x) = T_0 + T_1 x + T_2 x^2 + \ldots + T_n x^n + \ldots \tag{68}$$

Sakykime, kad

$$F(x) \equiv xf(x) = T_0 x + T_1 x^2 + \ldots + T_n x^{n+1} + \ldots, \tag{69}$$

ir pakelkime funkciją $F(x)$ kvadratu. Gausime lygybę

$$F^2(x) = T_0^2 x^2 + (T_0 T_1 + T_1 T_0) x^3 + \ldots +$$

$$+ (T_0 T_{n-1} + \ldots + T_{n-1} T_0) x^{n+1} + \ldots$$

Iš (67) rekurentinio sąryšio matyti, kad

$$T_0 T_{n-1} + \ldots + T_{n-1} T_0 = T_n.$$

Vadinasi,

$$F^2(x) = T_1 x^2 + T_2 x^3 + \ldots + T_n x^{n+1} + \ldots$$

Gautosios eilutės suma lygi $F(x) - T_0 x$, o kadangi $T_0 = 1$, tai ji lygi $F(x) - x$. Taigi

$$F^2(x) = F(x) - x. \tag{70}$$

Sudarėme kvadratinę lygtį, iš kurios galima rasti $F(x)$. Išsprendę tą lygtį, gauname

$$F(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Prieš šaknį parašėme minuso ženklą, nes priešingu atveju gautume $F(0) = 1$, o iš (69) dėstinio matyti, kad $F(0) = 0$.

Pagal (54) formulę rašome

$$\sqrt{1 - 4x} = (1 - 4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2x - \frac{2}{2} C_2^1 x^2 -$$

$$- \frac{2}{3} C_4^2 x^3 - \ldots - \frac{2}{n+1} C_{2n}^n x^{n+1} - \ldots$$

Vadinasi,

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 - 2x - \ldots - \frac{2}{n+1} C_{2n}^n x^{n+1} - \ldots \right) \right] =$$

$$= x + C_2^1 x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_{2n}^n x^{n+1} + \ldots \tag{71}$$

Palyginę (69) ir (71) lygybes, gauname $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$. Šis atsakymas visiškai sutampa su tuo sprendiniu, kurį anksčiau esame gavę kombinatorikos metodais (žr. p. 119).

Generuojančios funkcijos ir skaičių skirstiniai

IV skyriuje sprendėme įvairius skaičių skirstymo dėmenimis uždavinius. Juos labai lengva spręsti, taikant generuojančias funkcijas. Skaičiaus n skirstinių kiekį pažymėkime a_n ir sudarykime eilutę

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Labai dažnai pavyksta sudaryti tokį algebrinį reiškinį $f(x)$, kad, tame reiškinyje atidarius skliaustus, dėmuo x^n pasikartoja kaip tik a_n kartų. Tada

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

o tai reiškia, kad $f(x)$ — funkcija, generuojanti seką $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$

Tirkime, pavyzdžiui, *skaičiaus N skirstinius, kurių kiekvienas dėmuo lygus vienam iš skaičių $n_1, \ldots, n_k$. Be to, sumos dėmenys neturi kartotis, o dėmenų eilė neturi reikšmės.*

Spręsdami tokį uždavinį, sudarome reiškinį

$$(1 + x^{n_1})(1 + x^{n_2}) \ldots (1 + x^{n_k}). \tag{72}$$

Sudauginę skliaustuose parašytus dvinarius, gausime sumą, sudarytą iš sandaugų $x^{m_1} \ldots x^{m_s}$, kurių rodikliai $m_1, \ldots, m_s$ — kai kurie skaičiai $n_1, \ldots, n_k$. Todėl laipsnis x^N sumoje bus parašytas tiek kartų, kiek yra būdų skaičių N suskirstyti dėmenimis, laikantis nurodytųjų sąlygų.

Pavyzdžiui, norėdami sužinoti, keliais būdais galima užmokėti 78 kapeikas skirtingos vertės monetomis, sudarome reiškinį

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^5)(1 + x^{10})(1 + x^{15})(1 + x^{20})(1 + x^{50}), \tag{73}$$

sudauginame parašytuosius dvinarius ir randame laipsnio x^{78} koeficientą.

O dabar, remdamiesi generuojančia funkcija, išspręsime tokį uždavinį:

Keliais būdais galima sumokėti 29 kapeikas 3 ir 5 kapeikų vertės monetomis?

Čia reikia sužinoti, keliais būdais galima skaičių 29 suskirstyti į dėmenis, lygius 3 ir 5, kai į dėmenų eilę nekreipiama dėmesio. Kitaip sakant, reikia rasti lygties $3m + 5n = 29$ neneigiamų sprendinių skaičių.

Spręsdami tokį uždavinį, sudarome reiškinį

$$f(x) = (1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3m} + \ldots) \times$$
$$\times (1 + x^5 + x^{10} + \ldots + x^{5n} + \ldots). \tag{74}$$

Pirmuosiuose skliaustuose kintamojo x laipsnių rodikliai — visi neneigiamieji skaičiaus 3 kartotiniai, antruosiuose — visi neneigiamieji skaičiaus 5 kartotiniai. Aišku, kad, sudauginus tas dvi eilutes, laipsnio x^N koeficientas bus lygus lygties $3m + 5n = N$ sprendinių skaičiui. Atskiru atveju laipsnio x^{29} koeficientas bus uždavinio atsakymas.

Užuot dauginę skliaustuose parašytąsias eilutes, galime daryti šitaip. Pasinaudosime begalinės geometrinės progresijos sumos formule. Tada (74) reiškinį galėsime parašyti šitaip:

$$f(x)=\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}=\frac{1}{1-x^3-x^5+x^8}.$$

Paskui skaitiklį padalysime iš vardiklio pagal daugianarių dalybos taisyklę (tik daugianarius dėstysime ne didėjančių x laipsnių eile, o mažėjančių). Tos dalybos pradžia yra tokia:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-x^3-x^5+x^8 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+x^5-x^8} & 1+x^3+x^5+x^6+x^8+\ldots \\
\quad x^5+x^6-x^{11} & \\
\quad\quad \underline{x^6+x^8+x^{10}-x^{11}-x^{13}} & \\
\quad\quad\quad x^8+x^9+x^{10}-x^{13}-x^{14} &
\end{array}$$

Tęsdami dalybą toliau, rasime ieškomąjį laipsnio x^{29} koeficientą.

Išspręstąjį uždavinį galima apibendrinti šitaip:

Reikia sužinoti, keliais būdais galima suskirstyti skaičių N į dėmenis, lygius a, b, ..., m, nekreipiant dėmesio į dėmenų eilę.

Generuojanti funkcija bus šitokio pavidalo:

$$f(x)=(1+x^a+x^{2a}+\ldots+x^{ta}+\ldots)\times$$
$$\times(1+x^b+x^{2b}+\ldots+x^{sb}+\ldots)\times$$
$$\times(1+x^m+x^{2m}+\ldots+x^{qm}+\ldots)=\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)\ldots(1-x^m)}. \quad (75)$$

Pavyzdžiui, sprendžiant grivinos keitimo uždavinį (žr. p. 80), reikia sudaryti generuojančią funkciją

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}.$$

Sudauginę dvinarius, parašytus trupmenos vardiklyje, gauname

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}}.$$

Dalydami skaitiklį iš vardiklio, sudarome laipsninę eilutę:

$$1+x+2x^2+3x^3+4x^4+6x^5+8x^6+\ldots$$

Laipsnio x^{10} koeficientas yra atsakymas į iškeltąjį klausimą.

Savaime aišku, kad dalyti įprastu būdu čia gana sunku. Vietoj to galima daryti kitaip. Dalybos rezultatą išreiškiame begaline eilute su neapibrėžtais koeficientais:

$$\frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}}=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots$$

Abi šios lygybės puses padauginame iš vardiklio. Tada dešinėje pusėje laipsnio x^n koeficientas bus

$$A_n-A_{n-1}-A_{n-2}+A_{n-4}+A_{n-7}-A_{n-9}-A_{n-10}+A_{n-11}.$$

Kadangi kairėje koeficientas prie $x^n (n \geqslant 1)$ lygus nuliui, tai koeficientai A_n, *kai* $n \geqslant 1$, turi tenkinti rekurentinį sąryšį

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} - A_{n-4} - A_{n-7} + A_{n-9} + A_{n-10} - A_{n-11}.$$

Pradinės sąlygos šiuo atveju tokios: $A_n = 0$, kai $n < 0$, $A_0 = 1$. Iš tų duomenų lengva paeiliui apskaičiuoti visus koeficientus A_n.

Kaip pavyzdį, išspręsime abituriento problemą (žr. p. 77). Reikėjo apskaičiuoti, keliais būdais galima išreikšti skaičių 17 keturių dėmenų suma, kai dėmenys įgyja reikšmes 3, 4, 5 ir atsižvelgiama į dėmenų eilę. Sprendžiant šį uždavinį, generuojančia funkcija reikia laikyti $(x^3 + x^4 + x^5)^4$. Juk atidarius reiškinio $f(x) = (x^3 + x^4 + x^5)^4$ skliaustus, kiekvienas dėmuo x^N bus parašytas tiek kartų, kiek yra variantų skaičių N išreikšti 4 dėmenų suma, kai dėmenys įgyja reikšmes 3, 4 ir 5. Be to, čia bus ir narių, gaunamų vienas iš kito, sukeitus rodiklio dėmenis vietomis (pavyzdžiui, $x^3x^4x^5x^3$ ir $x^4x^3x^3x^5$).

Atlikti veiksmus reiškinyje $f(x) = (x^3 + x^4 + x^5)^4 = x^{12}(1 + x + x^2)^4$ galima, pavyzdžiui, pagal polinominę formulę. Bet yra ir kitas, paprastesnis, būdas. Pastebėkime, kad $1 + x + x^2 = \frac{1 - x^3}{1 - x}$. Todėl $f(x)$ galima parašyti šitaip;

$$f(x) = \frac{x^{12}(1 - x^3)^4}{(1 - x)^4} = x^{12}(1 - x^3)^4 (1 - x)^{-4}.$$

Pagal Niutono formulę su natūriniu rodikliu gauname

$$(1 - x^3)^4 = 1 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12},$$

o pagal Niutono formulę su sveiku neigiamu rodikliu (žr. p. 147) —

$$(1 - x)^{-4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \ldots + \frac{4 \cdot 5 \ldots (n+3)}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n + \ldots$$

Todėl

$$f(x) = x^{12}(1 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12}) \times$$
$$\times (1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 56x^5 + \ldots).$$

Sudauginę panariui daugianarį su laipsnine eilute, sužinome, kad dėstinio koeficientas prie x^{17} lygus 16. Vadinasi, gauname 16 nurodytojo tipo skirstinių.

Apskritai, kai reikia sužinoti, kiek yra skaičiaus N skirstinių, sudarytų iš k dėmenų, kurie įgyja reikšmes $n_1, \ldots, n_s$, ir atsižvelgiama į dėmenų eilę, generuojanti funkcija yra tokia:

$$f(x) = (x^{n_1} + x^{n_2} + \ldots + x^{n_s})^k. \tag{76}$$

Uždavinys yra paprastesnis, kai skaičiai $n_1, \ldots, n_s$ sudaro aritmetinę progresiją: tokiu atveju laipsniai $x^{n_1}, \ldots, x^{n_s}$ sudaro geometrinę progresiją, ir dėl to galima paprasčiau išreikšti funkciją $f(x)$.

Apskaičiuokime, pavyzdžiui, keliais būdais gali susidaryti 25 akys, išmetus 7 kauliukus. Šiuo atveju reikia sudaryti tokią generuojančią funkciją:

$$f(x) = (x + x^2 + \ldots + x^6)^7. \tag{77}$$

Ją, remdamiesi geometrinės progresijos sumos formule, galime užrašyti taip:

$$f(x)=\frac{x^7(1-x^6)^7}{(1-x)^7}=x^7(1-x^6)^7(1-x)^{-7}.$$

Dabar $(1-x^6)^7$ ir $(1-x)^{-7}$ išdėstome pagal Niutono formulę ir gauname

$$f(x)=x^7(1-7x^6+21x^{12}-35x^{18}+35x^{24}-21x^{30}+7x^{36}-x^{42})\times$$
$$\times(1+7x+28x^2+84x^3+210x^4+462x^5+\ldots).$$

Tuos dėstinius daugindami, nesunkiai apskaičiuojame koeficientą prie x^{25}. Jis ir atsako į iškeltąjį klausimą.

Panašiai, remiantis generuojančiomis funkcijomis, sprendžiami ir kiti uždaviniai, kuriuos nagrinėjome IV skyriuje.

Skirstinių kombinatorikos rezultatų suvestinė

1. Skaičius būdų suskirstyti n skirtingų daiktų į r numeruotų grupių, kai galimos ir tuščios grupės, lygus r^n.

2. Skaičius būdų suskirstyti n skirtingų daiktų į r numeruotų grupių, kai visos grupės netuščios, lygus funkcijos $(e^x—1)^r$ dėstinio laipsnine eilute koeficientui prie x^n, padaugintam iš $n!$. Tą skaičių galima parašyti šitaip:

$$r^n-\frac{r}{1}(r-1)^n+\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}(r-2)^n-\ldots$$

3. Jei tame pačiame uždavinyje grupės nėra numeruotos, tai būdų skaičius yra $r!$ kartų mažesnis.

4. Skaičius būdų suskirstyti n vienodų daiktų į r numeruotų grupių, kai visos grupės nėra tuščios, lygus C_{n-1}^{r-1}.

5. Skaičius būdų suskirstyti n vienodų daiktų į r numeruotų grupių, kai galimos ir tuščios grupės, lygus C_{n+r-1}^{r-1}.

6. Skaičius būdų suskirstyti n vienodų daiktų į r numeruotų grupių, kai kiekvienoje grupėje yra ne mažiau kaip q daiktų, lygus $C_{n-1-r(q-1)}^{r-1}$.

7. Skaičius būdų suskirstyti n vienodų daiktų į r numeruotų grupių, kai kiekvienos grupės elementų skaičius yra tarp q ir $q+s—1$, lygus funkcijos $\left(\frac{1-x^s}{1-x}\right)^r$ dėstinio laipsnine eilute koeficientui prie x^{n-rq}.

8. Skaičių būdų suskirstyti n vienodų daiktų į r nenumeruotų grupių, kai nėra nė vienos tuščios grupės, pažymėkime Π_n^r. Tada galima parašyti rekurentinę formulę

$$\Pi_n^r=\Pi_{n-1}^{r-1}+\Pi_{n-r-1}^{r-1}+\Pi_{n-2r-1}^{r-1}+\ldots$$

Be to, teisinga ir tokia lygybė:

$$\Pi_n^r=\Pi_{n-1}^{r-1}+\Pi_{n-r}^r.$$

Jei $n-r<r$, tai $\Pi_n^r=\Pi_{n-1}^{r-1}$.

Be skirstinių, nagrinėjami ir elementų dėstiniai į eilę, kai atsižvelgiama ne tik į grupių tvarką, bet ir į elementų tvarką grupėje. Kalbant apie tokius skirstinius, teisingi šitokie teiginiai:

9. Jei n skirtingų daiktų skirstoma į r numeruotų grupių, atsižvelgiant į elementų tvarką grupėse, ir galimos tuščios grupės, tai tokių skirstinių skaičius lygus

$$r(r+1)\ldots(r+n-1).$$

10. Jei n skirtingų daiktų skirstoma į r numeruotų grupių, atsižvelgiant į elementų tvarką grupėse, ir visos grupės netuščios, tai tokių skirstinių skaičius lygus

$$n!\,C_{n-1}^{r-1}=\frac{n!\,(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!}.$$

Jei tos grupės nenumeruotos, t. y. jų tvarka neturi reikšmės, tai skirstinių skaičius lygus $\frac{n!}{r!}C_{n-1}^{r-1}$.

11. Iš n skirtingų elementų bet kokiu būdu sudaroma r sutvarkytų grupių (galima imti ne visus elementus, kai kurias grupes palikti tuščias, bet į grupių tvarką reikia atsižvelgti). Tokių skirstinių skaičius lygus

$$n!\left[\frac{1}{n!}+\frac{r}{n!\,(n-1)!}+\frac{r(r+1)}{2!\,(n-2)!}+\ldots\right].$$

Tai funkcijos $e^x(1-x)^{-r}$ dėstinio laipsnine eilute koeficientas prie x^n, padauginus iš $n!$

12. Jei tame pačiame uždavinyje neleidžiama palikti tuščių grupių, tai skirstinių skaičius lygus funkcijos $e^x(1-x)^{-r}$ dėstinio laipsnine eilute koeficientui prie x^{n-r}, padaugintam iš $n!$.

KOMBINATORIKOS UŽDAVINIAI

1. Iš miesto A į miestą B veda penki keliai, o iš miesto B į miestą C – trys keliai. Kiek kelių, einančių per B, veda iš A į C?

2. Iš dviejų sporto draugijų, turinčių po 100 fechtuotojų, reikia paskirti po vieną fechtuotoją dalyvauti varžybose. Keliais būdais galima tai padaryti?

3. Yra penkių rūšių vokai be pašto ženklų ir keturių rūšių vienodos vertės pašto ženklai. Keliais būdais galima pasirinkti voką su pašto ženklu laiškui išsiųsti?

4. Keliais būdais galima pasirinkti balsę ir priebalsę iš žodžio „kalvis“?

5. Tą patį iš žodžio „kepurė“?

6. Metamas šešiasienis lošimo kauliukas ir paleidžiamas aštuoniasienis vilkelis (sukutis). Keliais būdais jie gali apvirsti?

7. Į kalno viršūnę eina penki keliai. Keliais būdais turistas gali užlipti ant kalno ir nusileisti žemyn? Tas pats klausimas, kai užlipti ir nusileisti reikia skirtingais keliais.

8. Fermoje yra 20 avių ir 24 kiaulės. Keliais būdais galima pasirinkti vieną avį ir vieną kiaulę? Jei viena pora pasirinkta, tai keliais būdais galima pasirinkti dar vieną porą?

9. Keliais būdais galima nurodyti du šachmatų lentos langelius – baltą ir juodą? O kai pasirenkamųjų langelių spalva nesvarbi?

10. Keliais būdais galima pasirinkti baltą ir juodą šachmatų lentos langelius, nesančius nei vienoje horizontalėje, nei vienoje vertikalėje?

11. Iš 12 daiktavardžių, 9 būdvardžių ir 10 veiksmažodžių reikia pasirinkti po vieną kiekvienos rūšies žodį. Kiek yra pasirinkimo būdų?

12. Turime 6 poras skirtingo dydžio pirštinių. Keliais būdais galima pasirinkti vieną kairės rankos pirštinę ir vieną dešinės rankos pirštinę, jei tos pirštinės turi būti skirtingo dydžio?

13. Iš 3 algebros vadovėlio egzempliorių, 7 geometrijos vadovėlio egzempliorių ir 7 trigonometrijos vadovėlio egzempliorių reikia pasirinkti po vieną kiekvieno vadovėlio egzempliorių. Keliais būdais galima tai padaryti?

14. Antikvariate yra 6 I. Turgenevo romano „Rudinas“ egzemplioriai, 3 romano „Bajorų gūžta“ egzemplioriai ir 4 romano „Tėvai ir vaikai“ egzemplioriai. Be to, yra 5 jo raštų tomai, kuriuose įdėti romanai „Rudinas“ ir „Bajorų gūžta“, ir 7 tomai, kuriuose įdėti romanai „ Bajorų gūžta“ ir „Tėvai ir vaikai“. Keliais būdais galima nusipirkti knygas, kad turėtume po vieną kiekvieno romano egzempliorių?

15. Išspręskite tą patį uždavinį, kai antikvariate yra dar trys raštų tomai, kuriuose išspausdintas „Rudinas“ ir „Tėvai ir vaikai“.

16. Pintinėje yra 12 obuolių ir 10 apelsinų. Jonukas pasirenka arba obuolį, arba apelsiną, o paskui Onutė ima ir obuolį, ir apelsiną. Kada Onutei didesnė pasirinkimo laisvė: ar kai Jonukas paima obuolį, ar kai apelsiną?

17. Turime tris vilkelius su 6, 8 ir 10 šonų. Keliais skirtingais būdais jie gali apvirsti? Tas pats klausimas, kai žinoma, jog bent du vilkeliai krito ant šono, pažymėto skaičiumi 1.

18. Keliais būdais galima pasirinkti trijų skirtingų spalvų dažus iš penkių turimų spalvų?

19. Keliais būdais galima sudaryti trispalvę vėliavą, turint 5 skirtingų spalvų audeklus? Tas pats klausimas, kai viena juosta turi būti raudona.

20. Kiek žodynų reikia išleisti, norint betarpiškai versti iš rusų, anglų, prancūzų, vokiečių ir italų kalbų į bet kurią kitą tų kalbų?

21. Kiek žodynų reikės išleisti papildomai, kai skirtingų kalbų skaičius padidės iki 10?

22. Keliais būdais iš pilno kortų komplekto* galima paimti po vieną kiekvienos spalvos kortą? Tas pats klausimas, kai neleidžiama imti dviejų vienodų kortų, t. y. dviejų karalių, dviejų dešimtakių ir t. t.

23. Keliais būdais iš pilno kortų komplekto (52 kortos) galima paimti po vieną kiekvienos spalvos kortą taip, kad raudonosios ir juodosios kortos sudarytų poras (pavyzdžiui, būgnų ir čirvų valetai, lapų ir gilių devynakės)?

24. Anglai turi paprotį vaikams duoti po kelis vardus. Keliais būdais galima pavadinti vaiką, jei visų vardų skaičius lygus 300, o vaikui duodami ne daugiau kaip trys vardai?

25. Keletas žmonių sėdasi apie apvalų stalą. Du susėdimo variantus laikysime sutampančiais, jei abiem atvejais kiekvienas žmogus turi tuos pačius kaimynus. Keliais skirtingais būdais galima pasodinti keturis žmones? Septynis žmones? Keliais atvejais du nurodytieji žmonės (iš septynių) bus stalo kaimynai? Keliais atvejais kurio nors žmogaus (iš septynių) kaimynai bus du nurodytieji žmonės?

26. Penkios merginos ir trys vaikinai žaidžia miestučius. Keliais būdais jie gali susiskirstyti į dvi komandas po 4 žaidėjus, jei kiekvienoje komandoje turi būti bent vienas vaikinas?

27. Reikia pasiųsti 6 skubius laiškus. Keliais būdais galima tai padaryti, jei laiškams išnešioti yra trys kurjeriai ir kiekvieną laišką galima patikėti bet kuriam iš jų?

28. Vienas žmogus turi 7 matematikos knygas, o kitas — 9 knygas. Keliais būdais jie gali pasikeisti knygomis, jei keičiama tik po vieną knygą?

29. Tas pats uždavinys, keičiant dvi vieno žmogaus knygas į dvi antrojo knygas.

30. Susirinkime turi kalbėti 5 žmonės: A, B, C, D ir E. Keliais būdais galima juos išdėstyti kalbėtojų sąraše, jei B negali kalbėti anksčiau už A?

31. Tas pats uždavinys, tik reikalaujama, kad B kalbėtų tuoj po A.

32. Kiek yra būdų susodinti aplink apvalų stalą 5 vyrus ir 5 moteris, jei vienos lyties žmonės negali sėdėti greta?

33. Tas pats uždavinys, tik jie sodinami ne apie apvalų stalą, o į karuselę, ir todėl dėstiniai, sutampantys vienas su kitu, pasisukus karuselei, laikomi vienodais.

34. Iš 52 kortų komplekto ištraukta 10 kortų. Keliais atvejais ištrauktųjų kortų grupėje bus bent vienas tūzas? Keliais atvejais tik vienas tūzas? Keliais atvejais nemažiau kaip du tūzai? Lygiai du tūzai?

35. Geležinkelio stotyje yra m šviesoforų. Kiek skirtingų signalų galima sudaryti iš jų, jei kiekvienas šviesoforas turi tris būsenas: raudoną, geltoną ir žalią?

36. Vienoje valstybėje visi gyventojai turėjo skirtingą skaičių dantų. Kiek daugiausia gyventojų gali būti toje valstybėje (didžiausias dantų skaičius lygus 32)?

37. Traukinio vagono kupė yra du priešpriešiniai suolai su 5 vietomis kiekviename. Iš 10 keleivių keturi nori sėdėti veidu į garvežį, o trys — nugara į garvežį; trims likusiems nesvarbu, kaip sėdėti. Keliais būdais gali susėsti keleiviai?

38. Į vietos komitetą išrinkti 9 žmonės. Iš jų reikia išrinkti pirmininką, jo pavaduotoją, sekretorių ir kultmasinio darbo organizatorių. Keliais būdais galima tai padaryti?

39. Konferencija, kurioje dalyvauja 52 žmonės, turi išrinkti penkių žmonių delegaciją. Keliais būdais galima tai padaryti?

40. Automobilių numeriai sudaromi iš vienos, dviejų arba trijų raidžių ir keturių skaitmenų. Raskite tokių numerių skaičių, kai vartojamos 32 rusų abėcėlės raidės.

41. Mama turi 2 obuolius ir 3 kriaušes. Kasdien ji duoda po vieną vaisių. Keliais būdais galima tai padaryti?

42. Panašus uždavinys, kai obuolių skaičius lygus m, o kriaušių n.

43. Panašus uždavinys, kai yra 2 obuoliai, 3 kriaušės ir 4 apelsinai.

44. Tėvas turi 5 skirtingus apelsinus, kuriuos dalija savo aštuoniems sūnums. Kiekvienam duoda arba vieną apelsiną, arba nieko neduoda. Keliais būdais jis gali padalyti apelsinus?

45. Panašus uždavinys, kai duodamų bet kuriam sūnui apelsinų skaičius neribojamas.

---

*Pilnas kortų komplektas — 52 kortos. Jos yra keturių spalvų: 13 čirvų, 13 būgnų, 13 kryžių ir 13 lapų. *Vertėjas*

46. Kiek skirtingų žodžių galima sudaryti iš žodžio „matematika“, sukeitinėjant raides vietomis? Iš žodžio „daktaras“? Iš žodžio „periferija“?

47. Sporto klubas, kuriame yra 30 narių, turi sudaryti 4 žmonių komandą, dalyvausiančią 1000 m bėgimo varžybose. Keliais būdais galima tai padaryti? Keliais būdais galima sudaryti 4 žmonių komandą dalyvauti estafetėje 100+200+400+800?

48. Keliais būdais galima sustatyti baltąsias figūras (2 žirgus, 2 rikius, 2 bokštus, valdovę ir karalių) pirmojoje šachmatų lentos horizontalėje?

49. Telefono tinklą sudaro n abonentų. Keliais būdais galima vienu metu sujungti tris poras?

50. Pašto skyriuje parduodama 10 rūšių atviručių. Keliais būdais galima jame nusipirkti 12 atviručių? Keliais būdais galima nusipirkti 8 atvirutes? Keliais būdais galima nusipirkti 8 skirtingas atvirutes?

51. Iš 7 vyrų ir 4 moterų reikia sudaryti 6 asmenų grupę, kurioje būtų bent dvi moterys. Keliais būdais galima tai padaryti?

52. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 sudarinėjami keturženkliai skaičiai, kurie dalijasi iš 4. Kiek skirtingų skaičių galima sudaryti, jei skaičiuje kiekvienas skaitmuo gali būti parašytas keletą kartų?

53. Traukinys, kuriame važiuoja n keleivių, sustoja m kartų. Keliais būdais gali išlipti keleiviai? Tas pats klausimas, kai atsižvelgiama tik į tai, kiek keleivių išlipa stotyse.

54. Kiek kėlinių galima sudaryti iš n elementų, kai du elementai a ir b negali stovėti greta? Kai trys elementai a, b ir c negali stovėti greta (bet kokia eile)? Kai elementai a, b ir c turi būti vienas nuo kito atskirti?

55. Gimnastikos varžybose dalyvauja 10 sportininkų ir 3 teisėjai. Kiekvienas teisėjas nepriklausomai nuo kitų sunumeruoja sportininkus, tuo išreikšdamas savo nuomonę apie jų pasiektus rezultatus varžybose. Nugalėtoju skelbiamas tas sportininkas, kurį nors du teisėjai laiko pirmuoju. Kokią dalį sudaro tie atvejai, kai nugalėtoją pavyksta nustatyti?

56. Keturi studentai laiko egzaminus. Keliais būdais gali pasiskirstyti jų pažymiai, kai nė vienas negauna nepatenkinamo pažymio?

57. Kiek vėrinių galima sudaryti iš septynių skirtingo dydžio karolių (reikia sunaudoti visus 7 karolius)?

58. Kiek vėrinių galima sudaryti iš penkių vienodų ir dviejų didesnių karolių?

59. Miestelyje gyvena 2000 gyventojų. Įrodykite, kad bent du gyventojai turi vienodus inicialus (pirmąsias vardo ir pavardės raides).

60. Septyni vaikinai ir dešimt merginų rengia šokius. Jei kokiame nors šokyje dalyvauja visi vaikinai, tai kiek yra variantų dalyvauti tame šokyje merginoms? Kiek yra variantų, kai atsižvelgiama tik į tai, kurios merginos lieka nepakviestos šokti? Atsakykite į tuos pačius klausimus, kai žinoma, jog dvi nurodytosios merginos tikrai bus pakviestos šokti.

61. Kuopą sudaro 3 karininkai, 6 seržantai ir 60 eilinių. Keliais būdais iš jų galima sudaryti būrį, kuriame turi būti vienas karininkas, du seržantai ir 20 eilinių? Tas pats klausimas, kai būryje turi būti kuopos vadas ir vyresnysis iš seržantų.

62. Mokyklos vakare dalyvauja 12 merginų ir 15 vaikinų. Keliais būdais iš jų galima sudaryti 4 poras šokiui?

63. Iš 3 vištų, 4 ančių ir 2 žąsų sudaromas bet koks tų paukščių rinkinys, kuriame yra ir vištų, ir ančių, ir žąsų. Kiek tokių rinkinių galima sudaryti?

64. Keliais būdais galima suskirstyti $m+n+p$ daiktų į tris grupes, kad vienoje grupėje būtų m daiktų, kitoje — n daiktų, o trečioje — p daiktų?

65. Lentynoje stovi $m+n$ skirtingų knygų: m knygų — juodais apdarais ir n knygų — raudonais apdarais. Kiek kėlinių galima sudaryti iš tų knygų, jei knygos juodaisiais apdarais užima m pirmųjų vietų? Kiek tokių kėlinių, kuriuose visos knygos juodais apdarais stovi greta?

66. Keliais būdais iš 15 žmonių galima sudaryti darbo grupę? Grupėje gali būti 1, 2, 3, ..., 15 žmonių. Tas pats uždavinys, kai yra n žmonių.

67. Sakykime, kad $p_1, \ldots, p_n$ — skirtingi pirminiai skaičiai. Kiek daliklių turi skaičius

$$q=p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n},$$

jei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — kokie nors natūriniai skaičiai (1 ir q irgi laikomi skaičiaus q dalikliais)? Apskaičiuokite visų daliklių sumą.

68. Keliais būdais galima sudėlioti 12 pusrublių į penkis skirtingus maišelius, kai nė vienas maišelis negali būti tuščias?

69. Keliais būdais galima sustatyti 20 knygų į 5 lentynas, jei kiekvienoje lentynoje telpa 20 knygų?

70. Keliais būdais galima užmauti 5 skirtingus žiedus ant vienos rankos pirštų, išskyrus nykštį?

71. 30 žmonių balsuoja už 5 pasiūlymus. Kiekvienas gali balsuoti tik už vieną pasiūlymą; be to, atsižvelgiama tik į tai, kiek balsų paduodama už pasiūlymą. Keliais būdais gali pasiskirstyti balsai?

72. Knygrišys turi įrišti 12 skirtingų knygų. Viršeliams yra raudonos, žalios ir rudos medžiagos. Keliais būdais galima įrišti tas knygas, jei kiekvienos spalvos viršeliais reikia įrišti bent po vieną knygą?

73. Iš 32 raidžių sudaroma 6 žodžių grupė, kurioje kiekviena raidė vartojama vieną ir tik vieną kartą. Kiek tokių grupių galima sudaryti?

74. Iš 17 susirinkusių žmonių reikia sudaryti 12 asmenų grupę. Du nurodyti asmenys (iš tų 17) negali būti grupėje kartu (grupėje yra arba pirmasis, arba antrasis, arba nėra nei pirmojo, nei antrojo). Kiek tokių grupių galima sudaryti?

75. Kiek skirtingų apyrankių galima pagaminti iš penkių vienodų smaragdų, šešių vienodų rubinų ir septynių vienodų safyrų, jei apyrankėje turi būti visi tie brangakmeniai?

76. Keliais būdais iš tų pačių brangakmenių galima pasirinkti tris brangakmenius žiedui?

77. Viename studentų bendrabučio kambaryje gyvena trys studentai. Jie turi 4 puodukus, 5 lėkšteles ir 6 šaukštelius (visi puodukai, lėkštelės ir šaukšteliai skiriasi vienas nuo kito). Keliais būdais galima paruošti stalą arbatai gerti (kiekvienam padedamas puodukas, lėkštelė ir šaukštelis)?

78. Vyras turi 12 pažįstamų — 5 moteris ir 7 vyrus, o žmona — 7 moteris ir 5 vyrus. Keliais būdais palima sudaryti 6 vyrų ir 6 moterų draugiją, jei vyras ir žmona pasikviestų po 6 savo pažįstamus?

79. Prie abiejų valties bortų gali sėdėti po 4 žmones. Keliais būdais galima sudaryti tos valties komandą, jei turime 31 kandidatą ir, be to, 10 žmonių nori sėdėti prie kairiojo borto, 12 — prie dešiniojo, o devyniems nesvarbu, kur sėdėti?

80. Urnoje yra 10 žetonų, sunumeruotų skaičiais 1, 2, 3, ..., 10. Išimami 3 žetonai. Keliais atvejais juose parašytųjų skaičių suma lygi 9? Ne mažesnė už 9?

81. Keliais būdais iš 52 kortų komplekto galima pasirinkti 6 kortas, kad būtų visos keturios spalvos?

82. Chorą sudaro 10 dainininkų. Keliais būdais galima paskirti trims dienoms po 6 dainininkus, kad kiekvieną dieną būtų kitokia choro sudėtis?

83. Žmogus turi 6 draugus ir 20 dienų iš eilės kviečiasi kasdien po 3 draugus, stengdamasis, kad kompanija napasikartotų. Keliais būdais jis gali tai padaryti?

84. Trys vaikinai ir dvi merginos ieško darbo. Mieste yra trys įmonės, kurioms reikia liejimo cecho darbininkų (priimami tik vyrai), du audimo fabrikai (kviečiamos tik moterys) ir du fabrikai, kuriems reikia ir vyrų, ir moterų. Keliais būdais tie jaunuoliai gali pasirinkti darbovietę?

85. Kiek žodžių, turinčių po penkias raides, galima sudaryti iš 33 raidžių, jei raidės žodyje gali kartotis, bet negali sutapti dvi gretimos raidės?

86. Matematikų olimpiados premijoms paskirti trys vienos knygos egzemplioriai, du kitos knygos egzemplioriai ir vienas trečios knygos egzempliorius. Keliais būdais galima įteikti premijas, jei olimpiadoje dalyvavo 20 žmonių ir niekam neduodamos dvi knygos iš karto? Tas pats uždavinys, tik reikalaujama niekam neduoti dviejų vienodų egzempliorių, bet leidžiama įteikti dvi arba net tris skirtingas knygas.

87. Sudaromas dominas nuo (0, 0) iki (n, n). Įrodykite, kad skaičius kauliukų su akių suma $n-r$ lygus skaičiui kauliukų su akių suma $n+r$. Apskaičiuokite, kiek kauliukų sudaro visą dominą.

88. Keliais būdais galima susodinti 7 vyrus ir 7 moteris apie apvalų stalą, jei moterys negali sėdėti viena šalia kitos?

89. Keliais būdais iš 16 arklių galima sudaryti šešeto arklių kinkinį, jei kiekviename kinkinyje turi būti trys arkliai iš šešeto $ABCA'B'C'$, bet negali būti porų AA', BB' ir CC'?

90. Kiek žodžių galima sudaryti iš 9 priebalsių ir 7 balsių, jei kiekviename žodyje turi būti 4 skirtingos priebalsės ir 3 skirtingos balsės? Kiek šitaip sudarytų žodžių neturi dviejų greta stovinčių priebalsių?

91. Mokslinio tyrimo instituto skyriuje dirba keletas žmonių. Kiekvienas jų moka bent vieną užsienio kalbą. Šeši moka anglų kalbą, šeši – vokiečių, septyni – prancūzų. Keturi moka anglų ir vokiečių kalbas, trys – vokiečių ir prancūzų, du – prancūzų ir anglų. Vienas darbuotojas moka visas tris kalbas. Kiek žmonių dirba tame skyriuje? Kiek darbuotojų moka tik anglų kalbą? Tik prancūzų?

92. Iškyloje į užmiestį dalyvauja 92 žmonės. Sviestainių su dešra pasiėmė 47 žmonės, su sūriu – 38 žmonės, su kumpiu – 42 žmonės, su dešra ir su sūriu – 28 žmonės, su dešra ir su kumpiu – 31 žmogus, su sūriu ir su kumpiu – 26 žmonės. Visų trijų rūšių sviestainių pasiėmė 25 žmonės. Keletas asmenų vietoj sviestainių pasiėmė pyragėlių. Kiek žmonių pasiėmė pyragėlių?

93. Kompanija, susidedanti iš 10 vyrų ir jų žmonų, skirstoma į 5 grupes po 4 asmenis pasiirstyti valtimis. Keliais būdais galima juos suskirstyti, kad kiekvienoje valtyje būtų du vyrai ir dvi moterys?

94. Keliais atvejais nurodytasis vyras pateks į vieną valtį su savo žmona?

95. Keliais atvejais du nurodytieji vyrai pateks į vieną valtį su savo žmonomis?

96. Kiek skirtingų keturženklių skaičių galima parašyti skaitmenimis 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, jei kiekvieną skaitmenį galima kartoti po keletą kartų?

97. Rašomi šešiaženkliai skaičiai taip, kad triženklio skaičiaus iš trijų pirmųjų skaitmenų ir triženklio skaičiaus iš trijų paskutinių skaitmenų suma būtų mažesnė už 1000. Kiek tokių šešiaženklių skaičių galima parašyti?

98. Keliais būdais galima sustatyti 12 baltųjų ir 12 juodųjų šaškių juoduosiuose šachmatų lentos langeliuose?

99. Kiek yra būdų perstatyti žodžio „Adonis“ raides taip, kad balsės stovėtų abėcėlės tvarka?

100. Kiek yra būdų perstatyti žodžio „aparatas“ raides taip, kad keturios raidės „a“ neitų iš eilės?

101. Kiek yra būdų perstatyti žodžio „lotosas“ raides taip, kad raidė „t“ stovėtų tuoj po raidės „o“?

102. Kiek yra būdų perstatyti žodžio „palatalizacija“ raides taip, kad dvi raidės „a“ neitų iš eilės?

103. Kiek yra būdų perstatyti žodžio „anonimas“ raides taip, kad dvi balsės nestovėtų greta?

104. Kiek yra būdų perstatyti žodžio „efuzija“ raides taip, kad nesikeistų balsių eilė?

105. Kiek yra būdų perstatyti žodžio „prokuroras“ raides taip, kad nesikeistų balsių eilė?

106. Kiek yra būdų perstatyti žodžio „vilkas“ raides taip, kad tarp balsių būtų dvi priebalsės?

107. Kiek yra būdų perstatyti žodžio „kontūras“ raides taip, kad antroje, ketvirtoje ir šeštoje vietoje būtų priebalsės?

108. Kiek yra būdų iš žodžio „kontūras“ pasirinkti dvi priebalses ir vieną balsę? Tas pats klausimas, kai pasirenkamųjų raidžių grupėje turi būti raidė „r“.

109. Kiek yra būdų perstatyti žodžio „amaras“ raides taip, kad trys raidės „a“ nestovėtų greta?

110. Tas pats uždavinys, bet draudžiama dvi raides „a“ rašyti vieną šalia kitos.

111. Kiek yra skirtingų būdų pasirinkti keletą raidžių iš sakinio: „Kas kas, tas les“. Į raidžių eilę neatsižvelgiama.

112. Keliais būdais iš to paties sakinio galima pasirinkti tris raides?

113. Keliais būdais iš to paties sakinio galima pasirinkti tris raides, atsižvelgiant į pasirenkamųjų raidžių eilę?

114. Keliais būdais galima perstatyti žodžio „pastogė“ raides, kad ir balsės, ir priebalsės eitų abėcėlės tvarka?

115. Keliais būdais galima perstatyti žodžio „kavinukas“ raides, kad balsės ir priebalsės kaitaliotųsi? Išspręskite tą uždavinį su žodžiu „romanas“.

116. Kiek yra būdų perstatyti žodžio „abakas“ raides, kad priebalsės eitų abėcėlės tvarka? Išspręskite tą uždavinį, kai dar reikalaujama, kad dvi raidės „a“ nestovėtų greta.

117. Keliais būdais galima perstatyti žodžio „testas“ raides, kad vienodos raidės neitų viena po kitos? Išspręskite tą uždavinį su žodžiu „mur mur“.

118. Keliais būdais galima pasirinkti 4 raides iš žodžio „mur mur“, jei neatsižvelgiama į pasirenkamųjų raidžių eilę? Kiek keturženklių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus 132 132 skaitmenų?

119. Rašomi sveiki neneigiami skaičiai, mažesni už milijoną. Kiek bus tokių skaičių, kuriuose kiekvienas iš skaitmenų 1, 2, 3, 4 parašomas bent vieną kartą? Kiek skaičių bus parašyta tik su šiais skaitmenimis?

120. Apskaičiuokite sumą tokių keturženklių skaičių, kuriuos galima parašyti, perstatinėjant skaitmenis 1, 2, 3, 4.

121. Tas pats uždavinys su skaitmenimis 1, 2, 2, 5.

122. Tas pats uždavinys su skaitmenimis 1, 3, 3, 3.

123. Tas pats uždavinys su skaitmenimis 1, 1, 4, 4.

124. Apskaičiuokite sumą tokių penkiaženklių skaičių, kuriuos galima parašyti, perstatinėjant skaitmenis 0, 1, 2, 3, 4. Pirmasis skaitmuo negali būti 0.

125. Kiek skaičių, mažesnių už milijoną, galima parašyti skaitmenimis 8 ir 9?

126. Tas pats uždavinys su skaitmenimis 9, 8 ir 7.

127. Tas pats uždavinys su skaitmenimis 9, 8 ir 0 (pirmasis skaitmuo negali būti 0).

128. Apskaičiuokite sumą visų triženklių skaičių, parašomų skaitmenimis 1, 2, 3, 4.

129. Apskaičiuokite sumą visų penkiaženklių skaičių, kuriuos galima parašyti skaitmenimis 1, 2, 3, 4, 5, kiekvieną skaitmenį pavartojus tik vieną kartą. Tas pats uždavinys, kai penkiaženkliai skaičiai rašomi skaitmenimis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

130. Kiek nelyginių keturženklių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus 3694 skaitmenų (rašant skaičių, kiekvieną skaitmenį galima vartoti ne daugiau kaip vieną kartą)? O lyginių?

131. Kiek šešiaženklių skaičių galima parašyti trimis lyginiais ir trimis nelyginiais skaitmenimis?

132. Tas pats klausimas, kai galimi ir „šešiaženkliai“ skaičiai, prasidedą nuliu.

133. Kiek yra tokių šešiaženklių skaičių, kurių skaitmenų suma — lyginis skaičius (pirmasis skaitmuo negali būti 0)? Tas pats uždavinys, kai imami visi skaičiai nuo 1 iki 999 999.

134. Kiek yra tokių dešimčiaženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi trim (pirmasis skaitmuo negali būti 0)? Tas pats uždavinys, kai imami visi skaičiai nuo 1 iki 9 999 999 999.

135. Kiek yra tokių devyniaženklių skaičių, kurių visi skaitmenys yra skirtingi?

136. Kiek sveikų skaičių nuo 0 iki 999 nesidalija nei iš 5, nei iš 7?

137. Kiek sveikų skaičių nuo 0 iki 999 nesidalija nei iš 2, nei iš 3, nei iš 5, nei iš 7?

138. Kiek skaičių nuo 0 iki 999 turi skaitmenį 9? Kiek skaičių, kuriuose skaitmuo 9 parašytas du kartus? Kiek skaičių turi skaitmenis 0 ir 9? Skaitmenis 8 ir 9? Kiek skaičių nuo 0 iki 999 999 neturi dviejų greta parašytų vienodų skaitmenų?

139. Kiek keturženklių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus 123 153 skaitmenų?

140. Kiek penkiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus 12 335 233 skaitmenų?

141. Kiek šešiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus 1 233 145 254 skaitmenų, jei du vienodi skaitmenys negali stovėti greta?

142. Kiek penkiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus 12 312 343 skaitmenų, jei trys skaitmenys 3 negali stovėti greta?

143. Kiek yra būdų perstatyti skaičiaus 12 341 234 skaitmenis, jei du vienodi skaitmenys negali stovėti greta?

144. Toks pat uždavinys, kai nagrinėjamasis skaičius yra 12 345 254.

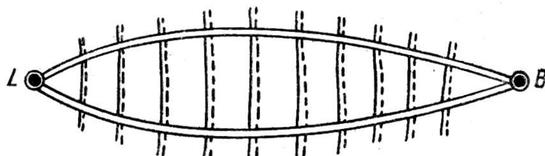
145. Kiek yra būdų perstatyti skaičiaus 1 234 114 546 skaitmenis, jei trys vienodi skaitmenys negali stovėti greta?

146. Kiek yra būdų perstatyti to skaičiaus skaitmenis, jei du vienodi skaitmenys negali stovėti greta?

147. Keliais būdais iš natūrinių skaičių nuo 1 iki 20 galima pasirinkti du skaičius taip, kad jų suma būtų nelyginė?

148. Keliais būdais iš natūrinių skaičių nuo 1 iki 30 galima pasirinkti tris skaičius taip, kad jų suma būtų lyginė?

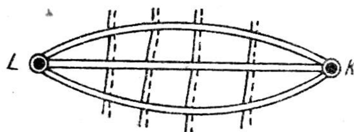
149. Iš Londono į Braitoną yra nutiesti du plentai, kuriuos jungia 10 paprastų kelių (34 pav.). Kiek yra būdų nuvažiuoti iš Londono į Braitoną taip, kad kelias nekirstų savęs?



34 pav.

150. Sakykime, kad du keleiviai išvažiuoja iš Londono skirtingais plentais (34 pav.). Kiek yra būdų jiems nuvykti į Braitoną, nė vienu plento ruožu nevažiuojant vienoda kryptimi?

151. Iš Londono į Kembridžą eina 3 plentai, kuriuos kerta 4 paprasti keliai (35 pav.). Kiek yra būdų nuvažiuoti iš Londono į Kembridžą, nė vienu plento ruožu nevažiuojant Londono kryptimi ir nė vienu ruožu nevažiuojant du kartus?



35 pav.

152. Yra neribotas kiekis 10, 15 ir 20 kap. vertės monetų. Keliais būdais galima pasirinkti 20 monetų?

153. Reikia atspėti penkias monetas, kurias partneris laiko saujoje. Monetos gali būti 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 kap. ir 1 rub. vertės. Kiek neteisingų atsakymų gali būti?

154. Kiek yra penkiaženklių skaičių? Kiek penkiaženklių skaičių galima parašyti lyginiais skaitmenimis? Kiek nelyginiais skaitmenimis? Kiek skaičių neturi skaitmenų, mažesnių už 6? Kiek skaičių neturi skaitmenų, didesnių už 3? Kiek skaičių turi visus skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5? Kiek skaičių turi visus skaitmenis 0, 2, 4, 6, 8?

155. Dviejų lošimo kaulelių sienose parašyti skaičiai 0, 1, 3, 7, 15, 31. Kiek skirtingų sumų gali atsiversti, išmetus tuos kaulelius?

156. Trijų lošimo kaulelių sienose parašyti skaičiai 1, 4, 13, 40, 121, 364. Kiek skirtingų sumų gali atsiversti, išmetus tuos kaulelius?

157. Metami šeši lošiamieji kauleliai, kurių sienose parašyti skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6. Keliais atvejais visuose kauleliuose pasirodys tas pats skaičius? Du skaičiai? Trys skaičiai? Keturi skaičiai? Penki skaičiai? Šeši skaičiai? (Kaulelius galima atskirti vieną nuo kito.)

158. Metama n lošimo kaulelių. Kiek skirtingų rezultatų galima gauti (rezultatai, kurie skiriasi tik skaičių eile, laikomi vienodais; kiekvieno kaulelio sienose parašyti skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6)?

159. Keliais skirtingais būdais galima išreikšti trijų dauginamųjų sandauga skaičių 1 000 000? Išraiškos, kurios skiriasi dauginamųjų tvarka, laikomos skirtingomis.

160. Toks pat uždavinys, tik į dauginamųjų tvarką neatsižvelgiama.

161. Keliais būdais galima įsidėti į dvi kišenes devynias skirtingos vertės monetas?

162. Keliais būdais galima padalyti $3n$ skirtingų daiktų trims žmonėms, kiekvienam duodant po n daiktų?

163. Duota $2n$ elementų, kurie skirstomi į n porų. Skirstiniai, kurie vienas nuo kito skiriasi tik elementų tvarka porose arba porų išdėstymo tvarka, laikomi vienodais. Kiek egzistuoja skirtingų skirstinių?

164. Išspręskite tą patį uždavinį, kai skirstoma nk elementų į n grupių po k elementų kiekvienoje grupėje.

165. Keliais būdais galima suskirstyti 30 darbininkų į 3 brigadas po 10 darbininkų kiekvienoje brigadoje? Į 10 grupių po 3 žmones kiekvienoje grupėje?

166. Keliais būdais galima padalyti 36 kortų komplektą į lygias dalis, jei kiekvienoje dalyje turi būti po 2 tūzus?

167. Keliais būdais galima suskirstyti 10 knygų į 5 banderoles po 2 knygas kiekvienoje banderolėje (į banderolių tvarką nekreipiama dėmesio)?

168. Keliais būdais galima suskirstyti 9 knygas į 4 banderoles po 2 knygas ir 1 banderolę su viena knyga?

169. Išspręskite tą patį uždavinį, sudarinėdami 3 banderoles po 3 knygas kiekvienoje banderolėje.

170. Keliais būdais 3 žmonės gali pasidalyti 6 vienodus obuolius, 1 apelsiną, 1 slyvą, 1 citriną, 1 kriaušę, 1 svarainį ir 1 datulę?

171. Keliais būdais galima atlikti šias dalybas, kai kiekvienas turi gauti po 4 vaisius?

172. *A*, *B* ir *C* turi po 3 obuolius. Be to, *A* turi 1 kriaušę, 1 slyvą ir 1 svarainį; *B* turi 1 apelsiną, 1 citriną ir 1 datulę, o *C* — 1 mandariną, 1 persiką ir 1 abrikosą. Keliais būdais jie gali mainytis tais vaisiais, kad kiekvienas turėtų po 6 vaisius?

173. Keliais būdais galima išdalyti 52 kortų komplektą trylikai lošėjų, kiekvienam lošėjui duodant po 4 kortas? Tas pats klausimas su sąlyga, kad kiekvienas turi gauti po vieną kiekvienos rūšies kortą. Tas pats klausimas su sąlyga, kad vienas gauna visų keturių rūšių kortas, o visi kiti – vienos rūšies kortas.

174. Keliais būdais galima ištraukti 4 kortas iš pilno komplekto, kad ištrauktosios kortos būtų trijų rūšių? Kad būtų dviejų rūšių?

175. Keliais būdais galima padalyti 52 kortas keturiems lošėjams, kiekvienam duodant po tris trijų rūšių kortas ir keturias ketvirtos rūšies kortas?

176. Keliais būdais galima padalyti 18 skirtingų daiktų 5 asmenims, jei keturi asmenys turi gauti po 4 daiktus, o penktasis — 2 daiktus? Tas pats uždavinys, kai trys asmenys gauna po 4 daiktus, o du – po 3 daiktus.

177. Turime 14 porų skirtingų daiktų. Raskite visų galimų ėminių skaičių, jei du ėminiai laikomi skirtingais, kai skiriasi juos sudarantys daiktai, bet ne daiktų tvarka.

178. Keliais būdais galima sudėti 4 juodus, 4 baltus ir 4 mėlynus rutulius į 6 skirtingus maišelius (kai kurie maišeliai gali likti tušti)?

179. Keliais būdais galima sudėti 3 monetas po 1 rub. ir 10 monetų po 50 kap. į 4 skirtingus maišelius?

180. Įrodykite, kad visų skaičiaus n skirstinių dėmenimis yra tiek pat, kiek skaičiaus $2n$ skirstinių į n dėmenų (į dėmenų eilę neatsižvelgiama).

181. Iš n daiktų sudaryta eilė. Keliais būdais iš tos eilės galima pasirinkti tris daiktus, jei draudžiama imti du greta stovinčius daiktus?

182. Vaikas pirmose dviejose šachmatų lentos horizontalėse stato baltąsias ir juodąsias šachmatų figūras (po du abiejų spalvų žirgus, rikius ir bokštus, po vieną abiejų spalvų karalių ir valdovę). Kiek yra tų figūrų išdėstymo variantų?

183. Keliais būdais tas figūras galima išdėstyti visoje lentoje?

184. Išspręskite tą patį uždavinį, kai dėstomi ir visi pėstininkai (po 8 abiejų spalvų pėstininkus).

185. Keliais būdais galima išdėstyti 15 baltų ir 15 juodų šaškių 24 langeliuose, jei kiekviename langelyje leidžiama statyti po keletą vienos spalvos šaškių? (Taip išdėstomos šaškės, žaidžiant rytiečių žaidimą „nardai“.)

186. Keliais būdais galima išdėstyti 20 baltų šaškių šachmatų lentoje, kad tas dėstinys nepasikeistų, pasukus lentą 90° kampu?

187. Keliais būdais galima išdėstyti 20 baltų šaškių šachmatų lentoje, kad dėstinys būtų simetriškas tiesės, dalijančios lentą pusiau, atžvilgiu?

188. Tas pats uždavinys, kai šaškės statomos tik juoduosiuose laukeliuose.

189. Keliais būdais galima išdėstyti 12 baltų ir 12 juodų šaškių juoduosiuose šachmatų lentos langeliuose, jei dėstinys turi būti simetriškas lentos centro atžvilgiu?

190. Tas pats uždavinys, bet reikalaujama, kad simetriškos viena kitai šaškės būtų skirtingos spalvos.

191. Keliais būdais galima išdėstyti 20 baltų šaškių kraštiniuose šachmatų lentos langeliuose, kad dėstinys nepasikeistų, pasukus lentą 90° kampu?

192. Keliais būdais galima išdėstyti 20 baltų šaškių kraštiniuose šachmatų lentos langeliuose, kad lentos priešinguose kraštuose šaškės stovėtų simetriškai tiesės, dalijančios lentą pusiau, atžvilgiu?

193. Keliais būdais galima sudėti 7 baltus ir 2 juodus rutulius į 9 biliardo kišenes? Kai kurios kišenės gali likti tuščios; visos kišenės laikomos skirtingomis.

194. Keliais būdais galima sudėti 7 baltus rutulius, 1 juodą ir 1 raudoną rutulį į 9 biliardo kišenes?

195. Keliais būdais galima išdalyti 27 knygas trims asmenims, jei A ir B kartu turi gauti dvigubai daugiau knygų, negu C?

196. Liftu keliasi 8 žmonės. Keliais būdais jie gali išeiti iš lifto keturiuose aukštuose, jei kiekviename aukšte turi išeiti bent vienas žmogus?

197. Keliais būdais iš natūrinių skaičių nuo 1 iki 100 galima pasirinkti tris skaičius, kurių suma dalijasi iš 3?

198. Keliais būdais iš $3n$ pirmųjų natūrinių skaičių galima pasirinkti tris skaičius, kurių suma dalijasi iš 3?

199. Turime n baltų rutulių ir vieną juodą rutulį. Keliais būdais galima kai kuriuos rutulius sudėti į $n+1$ biliardo kišenių, jei į kiekvieną kišenę galima dėti ne daugiau kaip vieną rutulį?

200. Keliais būdais galima sustatyti į eilę m baltų ir n juodų rutulių, jei tarp baltųjų ir juodųjų rutulių turi būti $2r-1$ kontaktų? $2r$ kontaktų?

201. Keliais būdais galima gauti iš skirtingų dalykų 8 pažymius, ne žemesnius už 3, kad jų suma būtų lygi 30?

202. Įrodykite, kad $m+n$ daiktų perstatyti taip, kad n daiktų liktų savo vietose, yra $\frac{(m+n)!\,D_m}{m!\,n!}$ būdų (žr. p. 53).

203. Reikia išdalyti r skirtingų daiktų žmonėms, kurių skaičius lygus $n+p$; be to, n nurodytųjų žmonių turi gauti bent po vieną daiktą. Įrodykite, kad tokių dalybų variantų skaičius lygus

$$S_r=(n+p)^r-n(n+p-1)^r+C_n^2(n+p-2)^r-\ldots+(-1)^n p^r.$$

204. Įrodykite, kad skaičiaus $2r+x$ skirstinių į $r+x$ nelygių nuliui dėmenų yra tiek pat, kiek ir skaičiaus r skirstinių į neneigiamus dėmenis.

205. Draugija, turinti n narių, renka vieną atstovą. Kiek yra galimų balsavimo baigčių, jei kiekvienas narys gali balsuoti tik už vieną žmogų (net ir už save)? Išspręskite tą uždavinį, kai atsižvelgiama tik į tai, kiek balsų gavo kiekvienas kandidatas, bet neatsižvelgiama, kas už jį balsavo.

206. Įrodykite teiginį: $2n$ vienodų daiktų padalyti į tris nesiskiriančias viena nuo kitos dalis taip, kad dviejų bet kurių dalių suma būtų didesnė už trečiąją, yra tiek pat būdų, kiek ir būdų analogiškai padalyti $2n-3$ daiktus.

207. Įrodykite, kad iš n daiktų pasirinkti nelyginį skaičių daiktų yra 2^{n-1} būdų.

208. Du žmonės dalijasi $2n$ vienos rūšies, $2n$ kitos rūšies ir $2n$ trečios rūšies daiktų. Abu pasiima po $3n$ daiktų. Įrodykite, kad visų tokių skirstinių skaičius lygus $3n^2+3n+1$.

209. Jei pridėtume dar $2n$ ketvirtos rūšies daiktų, tai dalybų, kuriose abu gauna po $4n$ daiktų, baigčių skaičius būtų lygus

$$\frac{1}{3}(2n+1)(8n^2+8n+3).$$

210. Jei daiktai dalijami į nesiskiriančias dalis, tai bus tokie atsakymai:

$$\frac{1}{2}(3n^2+3n+2),\qquad \frac{1}{3}(n+1)(8n^2+4n+3).$$

211. Yra m rūšių daiktų. Imant po $2n$ kiekvienos rūšies daiktų ir juos dalijant į dvi lygias dalis, dalybų baigčių skaičius lygus

$$C_{mn+m-1}^{m-1}-C_m^1 C_{mn+m-2n-2}^{m-1}+C_m^2 C_{mn+m-4n-3}^{m-1}-\ldots \pm C_m^x C_{mn+m-1-x(2n+1)}^{m-1} \mp \ldots$$

Įrodykite.

212. Keliais būdais galima sudėti penkis baltus, penkis juodus ir penkis raudonus rutulius į tris skirtingas dėžes, dedant po penkis rutulius į kiekvieną dėžę?

213. Turime trijų rūšių daiktų. Jei imame po n kiekvienos rūšies daiktų ir juos skirstome trims asmenims A, B ir C, kiekvienam duodami po n daiktų, tai galimų skirstinių skaičius lygus

$$C_{n+2}^2 C_{n+2}^2-3C_{n+3}^4=\frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2+3n+4).$$

Įrodykite.

214. Keliais būdais galima susodinti į eilę 3 anglus, 3 prancūzus ir 3 turkus taip, kad trys vienos tautybės žmonės nesėdėtų greta?

215. Tas pats uždavinys, bet reikalaujama, kad greta nesėdėtų du tėvynainiai.

216. Keliais būdais galima susodinti 3 anglus, 3 prancūzus ir 3 turkus apie apvalų stalą, jei du vienos tautybės žmonės negali sėdėti greta?

217. Turime neribotą kiekį 5, 10, 15 ir 20 kap. vertės pašto ženklų. Keliais būdais iš jų galima sudaryti 40 kap. sumą, klijuojant ženklus eilute? (Dėstiniai, kurie skiriasi ženklų eile, laikomi skirtingais.)

218. Keliais būdais galima iškeisti rublį 10, 15, 20 ir 50 kap. vertės monetomis?

219. Keliais būdais galima sudaryti 78 g, turint 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20 ir 50 g svarsčius? Pakeitus svarstį kitu tokios pat masės svarsčiu, gaunama nauja kombinacija.

220. Yra šeši rutuliai: 3 juodi, 1 raudonas, 1 baltas ir 1 mėlynas. Keliais būdais iš jų galima sudaryti 4 rutulių eilę?

221. Keliais būdais natūrinį skaičių n galima išreikšti trijų natūrinių skaičių suma (išraiškos, kurios skiriasi dėmenų tvarka, laikomos skirtingomis)?

222. Kiek ir kokių skaitmenų reikia, norint parašyti visus skaičius nuo 1 iki 999 999 imtinai? Nuo 1 iki 10^n-1 imtinai?

223. Kiek skirtingų dešimčiaženklių skaičių galima parašyti skaitmenimis 1, 2 ir 3, jei skaitmuo 3 kiekviename skaičiuje rašomas du kartus? Kiek parašytųjų skaičių dalijasi iš 9?

224. Sakoma, kad du gretinyje parašyti skaičiai sudaro inversiją, jei didesnysis skaičius yra parašytas anksčiau, negu mažesnysis. Kiek inversijų yra visuose skaičių 1, 2, ..., n kėliniuose?

225. Skaičiaus n skirstinių į tris skirtingas dalis kiekis lygus

$$\left[\frac{1}{12}(n^2-6n+12)\right].$$

Įrodykite šį teiginį.

226. Skaičiaus $12n+5$ skirstinių į 4 dalis, kurios neviršija $6n+2$, kiekis lygus

$$\frac{1}{2}(n+1)(12n^2+9n+2).$$

Įrodykite šį teiginį.

227. Skaičiaus $12n+5$ skirstinių į 4 skirtingas dalis, kurios neviršija $6n+2$, kiekis lygus

$$\frac{n}{2}(12n^2+3n-1).$$

Įrodykite šį teiginį.

228. Apskaičiuokite, kiek geometrinių progresijų, sudarytų iš trijų natūrinių skaičių, turi narius, neviršijančius 100.

229. Keliais būdais galima sustatyti į eilę 6 anglus, 7 prancūzus ir 10 turkų, jei kiekvienas anglas turi stovėti tarp prancūzo ir turko, o prancūzas negali stovėti šalia turko?

230. Tas pats uždavinys su 5 anglais, 7 prancūzais ir 10 turkų.

231. Kiek sprendinių turi toks uždavinys: raskite du natūrinius skaičius, kurių bendras didžiausias daliklis yra G, o bendras mažiausias kartotinis $M = Ga^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$ (a, b, c, d – pirminiai skaičiai)?

232. Išspręskite tą patį uždavinį, išbraukę žodžius „mažiausias" ir „didžiausias".

233. Kiek derinių galima sudaryti iš 20 raidžių po 6, jei kiekviename derinyje ta pati raidė gali pasikartoti ne daugiau kaip du kartus?

234. Yra $p+q+r$ raidžių: p raidžių α, q raidžių β ir r raidžių γ. Iš jų sudarinėjami $(p+q+r)$-elemenčiai kėliniai, kuriuose prieš pirmąją β stovi bent viena α, o prieš pirmąją γ – bent viena β. Kiek tokių kėlinių galima sudaryti?

235. 30 cm juostelė dažoma šitaip: raudona, balta, mėlyna, raudona, balta, mėlyna ir t. t. Pradedama dažyti raudona spalva, baigiama – mėlyna. Kiekvienai spalvai skiriama po 10 cm, o vienaspalvės atkarpos ilgis ne mažesnis už 2 cm. Kiek yra tos juostelės nudažymo variantų, jei atkarpų ilgiai reiškiami sveikais skaičiais? Kaip pasikeis atsakymas, kai atmesime sąlygą, kad reikia baigti mėlynos spalvos atkarpa? Įrodykite: jei visų juostelių ilgiai ne mažesni už 3 cm, tai 153 atvejais paskutinė atkarpa bus mėlyna, 71 atveju – balta ir 81 atveju – raudona.

236. Turiu 6 draugus. Su kiekvienu draugu esu pietavęs 8 kartus, su kiekviena pora draugų – 5 kartus, su kiekvienu trejetu – 4 kartus, su kiekvienu ketvertu – 3 kartus, su kiekvienu penketu – 2 kartus, su visais šešiais – 1 kartą, o be kiekvieno iš jų – 8 kartus. Kiek kartų esu pietavęs vienas?

237. Du egzaminatoriai vienu metu egzaminuoja 12 mokinių iš dviejų dalykų. Iš kiekvieno dalyko mokinys atsakinėja po 5 minutes. Keliais būdais egzaminatoriai gali pasidalyti darbą, kad nė vienam mokiniui nereikėtų atsakinėti iš dviejų dalykų tuo pačiu metu?

238. Keliais būdais 6 žmonės iš 6 porų pirštinių gali pasirinkti po pirštinę dešinei ir kairei rankai ir nė vienas neturėti poros? Tas pats klausimas, kai 6 žmonės turi 9 poras pirštinių.

239. Reiškinio $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ raidės perstatinėjamos taip, kad šalia kiekvienos raidės stovėtų tokia pat raidė (iš dešinės arba iš kairės). Įrodykite, kad tokių kėlinių skaičius lygus 6. Kai šitaip perstatinėjamos reiškinio $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ raidės, irgi gaunami 6 kėliniai. Kai reiškinys yra $\alpha^4\beta^4\gamma^4$, tokių kėlinių skaičius lygus 90; kai šitaip perstatinėjamos reiškinio $\alpha^5\beta^5\gamma^5$ raidės, kėlinių skaičius lygus 426. Įrodykite tai.

240. Šachmatų olimpiadoje dalyvauja n šalių atstovai, o kiekvienos šalies komandą sudaro 4 asmenys. Keliais būdais jie gali sustoti į eilę, jei reikalaujama, kad šalia kiekvieno šachmatininko stovėtų tos pačios šalies atstovas?

241. Šachmatų lentos langeliai dažomi 8 spalvomis; kiekvienoje horizontalėje turi būti visų 8 spalvų langeliai, o vertikalėje negali būti dviejų vienaspalvių langelių greta. Kiek yra tokio lentos nudažymo variantų?

242. Yra n vienodų daiktų ir n skirtingų daiktų. Keliais būdais galima iš jų pasirinkti n daiktų? Keliais būdais galima tuos $2n$ daiktų sustatyti į eilę?

243. Iš m prancūzų ir n anglų sudaryta eilė, kurioje šalia kiekvieno žmogaus stovi bent vienas jo tėvynainis. Įrodykite, kad tokių eilių skaičius lygus

$$m!\,n!\,[1+(C^0_{m-2}+C^1_{m-3})(C^0_{n-2}+C^1_{n-3})+(C^1_{m-3}+C^2_{m-4})\times$$
$$\times(C^1_{n-3}+C^2_{n-4})+(C^2_{m-4}+C^3_{m-5})(C^2_{n-4}+C^3_{n-5})+\ldots].$$

244. Kiek šešiaženklių skaičių turi tik tris skirtingus skaitmenis?

245. Kiek m-ženklių skaičių turi tik k skirtingų skaitmenų?

246. Iš skaičių 1, 2, ..., n sudarinėjami k-elemenčiai gretiniai, kuriuose lyginiai skaičiai stovi vietose su lyginiais numeriais, o nelyginiai – vietose su nelyginiais numeriais. Be to, gretinio skaičiai turi sudaryti didėjančią seką (pavyzdžiui, 3678). Kiek tokių gretinių galima sudaryti?

247. Duota $2n$ elementų: $a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n, a_n$; be to, $a_i \neq a_j$, kai $i \neq j$. Iš jų sudarinėjami $2n$-elemenčiai kėliniai, kuriuose du vienodi elementai nestovi greta. Kiek tokių kėlinių galima sudaryti?

248. Duota n rinkinių, kurių kiekvienas sudarytas iš q vienodų elementų. Skirtingų rinkinių elementai yra skirtingi. Iš tų nq elementų sudarinėjami kėliniai, kuriuose nėra greta stovinčių vienodų elementų. Kiek tokių kėlinių galima sudaryti?

249. Išspręskite tą uždavinį, galvodami, kad elementai yra išdėstyti apskritime.

250. Iš lentynos, kurioje sustatyta n knygų, imame p knygų taip, kad tarp kiekvienų dviejų paimtųjų knygų ir po p-tosios paimtos knygos būtų ne mažiau kaip s knygų. Kiek yra tų knygų pasirinkimo variantų?

251. Skaičiai, reiškiantys, kiek mokinių iš 5, 6, 7, 8, 9 ir 10 klasės dalyvavo matematikų olimpiadoje, sudaro aritmetinę progresiją. Kiekvienai klasei skiriamų premijų skaičius lygus tos progresijos skirtumui. Įrodykite, kad premijų paskirstymo variantų skaičius nepasikeistų, jei visas premijas skirtume 10 klasės mokiniams (galvojama, kad visos premijos yra skirtingos).

252. Languotame popieriuje nubraižytas kvadratas $ABCD$, kurio kraštinės ilgis lygus 4 cm. Paskui iš langelių kraštinių sudaryti visi trumpiausi keliai iš viršūnės A į viršūnę C. Įsitikinkite, kad tokių kelių skaičius lygus 70; be to 4, kraštinės priklauso 35 keliams, 8 – 20 kelių, 4 – 18 kelių, 4 – 15 kelių, 4 – 12 kelių, 4 – 10 kelių, 4 – 5 keliams, 4 – 4 keliams, 4 – 1 keliui.

Panašiai ištirkite sankryžas: per vieną sankryžą eina 36 keliai, per 4 – 35 keliai, per 4 – 30 kelių, per 4 – 15 kelių, per 4 – 5 keliai, per 4 – 4 keliai, per 2 – 1 kelias (galiniai taškai neskaitomi).

253. Braižomi trikampiai, kurių viršūnės yra duotojo iškilo šešiakampio viršūnės. Kiek tokių trikampių yra ?

254. Kiek yra trikampių, kurių kraštinių ilgis reiškiamas skaičiais 4, 5, 6, 7?

255. Braižomi stačiakampiai gretasieniai, kurių briaunų ilgis reiškiamas sveikaisiais skaičiais nuo 1 iki 10. Kiek skirtingų gretasienių galima šitaip nubraižyti?

256. Plokštumoje nubrėžtos 4 tiesės. Nė viena tų tiesių nėra lygiagretė kitai ir nė viena neina per kitų dviejų tiesių susikirtimo tašką. Kiek gauta trikampių?

257. Plokštumoje pažymėta n taškų, iš kurių p priklauso vienai tiesei. Kiti taškai išdėstyti taip, kad nėra trijų taškų, priklausančių vienai tiesei. Braižomi trikampiai, kurių viršūnės yra pažymėtieji taškai. Kiek tokių trikampių galima nubraižyti?

258. Tiesėje pažymėta p taškų, o jai lygiagrečioje tiesėje – dar q taškų. Braižomi trikampiai, kurių viršūnės yra pažymėtieji taškai. Kiek tokių trikampių galima nubraižyti?

259. Sakykime, kad tomis pačiomis sąlygomis trečioje tiesėje, lygiagrečioje pirmosioms, pažymėta dar r taškų taip, kad nėra trijų taškų, priklausančių vienai tiesei, kertančiai visas tris lygiagretes. Kiek naujų trikampių galima nubraižyti?

260. Kiekviena kvadrato kraštinė padalyta į n dalių. Kiek galima nubraižyti trikampių, kurių viršūnės yra kvadrato kraštinių dalijimo taškai?

261. Plokštumoje nubrėžta n tiesių. Nė viena tų tiesių nėra lygiagreti kitai ir nė viena neina per kitų dviejų tiesių susikirtimo tašką. Kiek gauta susikirtimo taškų?

262. Plokštumoje nubrėžta n tiesių, tenkinančių tokias sąlygas: p tiesių eina per tašką A, o q – per tašką B, bet nėra tiesės, einančios per taškus A ir B; kiekviena kita tiesė neina per kitų dviejų tiesių susikirtimo tašką. Be to, nė viena iš tų n tiesių nėra lygiagreti kitai tiesei. Kiek gauta susikirtimo taškų?

263. Plokštumoje nubrėžta n tiesių, tenkinančių tokias sąlygas: nė viena tiesė neina per kitų dviejų tiesių susikirtimo tašką ir nė viena tiesė nėra lygiagreti kitai. Į kiek dalių padalyta plokštuma?

264. Erdvėje yra n plokštumų, tenkinančių tokias sąlygas: nėra keturių plokštumų, susikertančių viename taške; nėra trijų plokštumų, einančių per vieną tiesę; nėra lygiagrečių plokštumų. Į kiek dalių padalyta erdvė?

265. Plokštumoje pažymėti penki taškai, kurie tenkina tokias sąlygas: jei per kiekvienus du taškus nubrėšime tiesę, tai bet kurios dvi nubrėžtosios tiesės nebus nei lygiagrečios, nei statmenos, nei sutampančios. Per kiekvieną tašką nubrėžiame statmenis tiesėms, jungiančioms kitus keturis taškus. Kiek daugiausia susikirtimo taškų gali susidaryti, susikertant tiems statmenims, jei penki duotieji taškai neskaitomi?

266. Braižomi trikampiai, kurių kraštinių ilgis reiškiamas natūriniais skaičiais, didesniais už n ir ne didesniais už $2n$. Kiek tokių trikampių galima nubraižyti? Kiek iš jų yra lygiašonių ir kiek lygiakraščių?

267. Skaičius trikampių, kurių kraštinių ilgis reiškiamas natūriniais skaičiais, ne didesniais už $2n$, lygus $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$. Įvairiakraščių šios rūšies trikampių skaičius lygus $\frac{1}{6}n(n-1)(4n-5)$. Įrodykite šiuos teiginius.

268. Įrodykite, kad skaičius trikampių, kurių kraštinių ilgis neviršija $2n-1$, lygus $\frac{1}{6} n(n+1)(4n-1)$, o įvairiakraščių tokių trikampių skaičius lygus $\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3)$.

269. Plokštumoje nubrėžta n tiesių taip, kad nėra trijų tiesių, einančių per vieną tašką. Jų susikirtimo taškai suskirstyti į nesutvarkytas n taškų grupes, kuriose nėra trijų taškų, priklausančių vienai tiesei. Įrodykite, kad tokių grupių skaičius lygus $\frac{1}{2}(n-1)!$.

270. Plokštumoje pažymėta n taškų taip, kad nėra trijų taškų, priklausančių vienai tiesei. Kiek galima nubraižyti laužtinių, kurios turi r grandžių ir kurių viršūnės yra pažymėtuose taškuose?

271. Vienoje tiesėje pažymėta n taškų, o kitoje, lygiagrečioje pirmajai, – m taškų. Tie taškai sujungti tiesėmis. Įrodykite, kad nubrėžtosios tiesės turi $\frac{1}{2} mn(m-1)\times$ $\times(n-1)$ susikirtimo taškų. (Tariame, kad nė viena nubrėžtoji tiesė neina per kitų dviejų tiesių susikirtimo tašką; pasirinktieji taškai neįskaitomi.)

272. Plokštumoje duota n taškų aibė, kurioje nėra trijų taškų, priklausančių vienai tiesei, ir keturių taškų, priklausančių vienam apskritimui. Per kiekvienus du taškus nubrėžta tiesė, o per kiekvienus tris – apskritimas. Tiriami taškai, kuriuose nubrėžtosios tiesės kerta apskritimus. Koks didžiausias tokių susikirtimo taškų skaičius?

273. Erdvėje duota n taškų aibė, kurioje nėra keturių taškų, priklausančių vienai plokštumai. Per kiekvienus tris taškus išvesta plokštuma. Sakykime, kad nėra dviejų plokštumų, lygiagrečių viena kitai. Sužinokite, kiek tiesių gaunama, susikirtus toms plokštumoms, ir kiek iš tų tiesių neina per duotuosius taškus.

274. Iš n atkarpų, kurių ilgis atitinkamai lygus $1, 2, \ldots, n$, pasirenkame 4 atkarpas, kurios gali būti apibrėžtojo keturkampio kraštinės. Įrodykite, kad tokių keturkampių skaičius lygus $\frac{1}{48}[2n(n-2)(2n-5)-3+3(-1)^n]$. Kiek gautume keturkampių, jeigu jų kraštinės galėtų būti ir vienodo ilgio?

275. Duota n taškų aibė, kurioje nėra keturių taškų, priklausančių vienam apskritimui. Per kiekvienus tris taškus nubrėžiamas apskritimas. Raskite didžiausią tų apskritimų susikirtimo taškų skaičių.

276. Per sferos centrą eina n plokštumų, kurios sferą padalija į dalis. Įrodykite, kad bendruoju atveju gauname ne daugiau kaip n^2-n+2 dalių.

277. Kubo sienos dažomos šešiomis skirtingomis spalvomis (kiekviena siena – kita spalva). Du nudažymo būdus laikysime geometriškai sutampančiais, kai vieną galima sutapdinti su kitu, sukant kubą kaip kietąjį kūną. Kiek geometriškai skirtingų nudažymo būdų yra iš viso?

278. Keliais geometriškai skirtingais būdais galima nudažyti tetraedro sienas, vartojant keturių skirtingų spalvų dažus?

279. Keliais geometriškai skirtingais būdais galima nudažyti oktaedro sienas, vartojant aštuonių skirtingų spalvų dažus?

280. Išspręskite analogiškus uždavinius, kai dažomieji kūnai yra taisyklingasis dodekaedras ir taisyklingasis ikosaedras.

281. Išnagrinėkite ankstesniuosius uždavinius tais atvejais, kai spalvų skaičius yra mažesnis už sienų skaičių (pavyzdžiui, kubas dažomas dviem spalvomis, trim spalvomis, keturiomis spalvomis, penkiomis spalvomis).

282. Kiek yra trikampių, kurių kraštinių ilgis reiškiamas natūriniais skaičiais, o perimetras lygus 40? Kiek trikampių, kurių perimetras lygus 43?

283. Trikampių, kurių kraštinių ilgis reiškiamas natūriniais skaičiais, o perimetras lygus $4n+3$, yra daugiau, negu trikampių, kurių kraštinių ilgis irgi reiškiamas natūriniais skaičiais, o perimetras lygus $4n$. Įrodykite, kad, iš pirmųjų trikampių skaičiaus atėmę antrųjų trikampių skaičių, gauname $n+1$.

284. Nagrinėjami trikampiai, kurių kraštinių ilgis reiškiamas natūriniais skaičiais, o perimetras lygus N. Tokių trikampių skaičius nurodytas lentelėje:

N	Trikampių skaičius	N	Trikampių skaičius
$12n$	$3n^2$	$12n+6$	$3n^2+3n+1$
$12n+1$	$n(3n+2)$	$12n+7$	$(n+1)(3n+2)$
$12n+2$	$n(3n+1)$	$12n+8$	$(n+1)(3n+1)$
$12n+3$	$3n^2+3n+1$	$12n+9$	$3n^2+6n+3$
$12n+4$	$n(3n+2)$	$12n+10$	$(n+1)(3n+2)$
$12n+5$	$(n+1)(3n+1)$	$12n+11$	$3n^2+7n+4$

Patikrinkite šią lentelę.

285. Miesto autobusų tinklas sudarytas šitaip:

1) iš kiekvienos stotelės į visas kitas stoteles galima nuvažiuoti be persėdimo;

2) du bet kurie maršrutai yra suderinti taip, kad iš vieno maršruto persėsti į kitą galima tik vienoje stotelėje;

3) kiekviename maršrute yra n stotelių.

Kiek autobusų maršrutų yra tame mieste?

286. Mieste yra 57 autobusų maršrutai. Jų tinklas tenkina tokias sąlygas:

1) iš kiekvienos stotelės į visas kitas stoteles galima nuvažiuoti be persėdimo;

2) du bet kurie maršrutai yra suderinti taip, kad iš vieno maršruto persėsti į kitą galima tik vienoje stotelėje;

3) kiekviename maršrute yra ne mažiau kaip trys stotelės.

Kiek stotelių yra kiekviename maršrute?

287. Ar galima mieste nutiesti 10 autobusų maršrutų ir juose padaryti stoteles tokiomis sąlygomis: pasirinkus 8 bet kokius maršrutus, bent viena stotelė nepriklauso tiems maršrutams, o pasirinkus 9 bet kokius maršrutus, kiekviena stotelė priklauso kuriam nors iš tų maršrutų?

288. Yra trys plokštumos ir rutulys. Raskite didžiausią skaičių skirtingų rutulių, liečiančių tas plokštumas ir duotąjį rutulį.

289. Duoti trys plokštumos taškai. Toje plokštumoje per kiekvieną duotąjį tašką nubrėžiame po m tiesių taip, kad nebūtų dviejų tiesių, lygiagrečių viena kitai, ir trijų tiesių, susikertančių viename taške. Raskite tų tiesių susikirtimo taškų skaičių.

290. Erdvėje pasirinkta n taškų; m pasirinktųjų taškų priklauso plokštumai P, o kiti taškai išdėstyti taip, kad nėra keturių taškų, priklausančių vienai plokštumai. Kiek yra plokštumų, kurioms priklauso po tris pasirinktuosius taškus?

291. Plokštumoje pasirinkti trys taškai A, B ir C. Per tašką A nubrėžta m tiesių, per B — n tiesių, o per C — p tiesių. Visos tiesės nubrėžtos taip, kad nėra trijų tiesių, susikertančių viename taške, ir nėra dviejų tiesių, lygiagrečių viena kitai. Apskaičiuokite, kiek yra trikampių, kurių viršūnės yra tų tiesių susikirtimo taškai, nesutampantys su pasirinktaisiais taškais A, B ir C.

292. Kiek yra trikampių, kurių viršūnės sutampa su duoto iškiliojo n-kampio viršūnėmis, o kraštinės nesutampa su to n-kampio kraštinėmis?

293. Plokštumoje nubrėžta n tiesių. Kiekvienoje tiesėje pasirinkta po p taškų, kurie nesutampa su nubrėžtųjų tiesių susikirtimo taškais. Be to, nėra trijų taškų, priklausančių vienai tiesei, nesutampančiai su nubrėžtosiomis tiesėmis. Raskite skaičių trikampių, kurių viršūnės yra pasirinktieji taškai.

294. Įrodykite, kad iškiliojo n-kampio įstrižainių susikirtimo taškai yra pasiskirstę šitaip: to daugiakampio išorėje yra $\frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5)$ taškų, o viduje — $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ taškų (tariame, kad nė viena įstrižainė nėra lygiagreti kitai ir nė viena neina per kitų dviejų susikirtimo tašką).

295. Apskritime yra n taškų. Kiek skirtingų daugiakampių (nebūtinai iškilių) galima įbrėžti į tą apskritimą, daugiakampio viršūnėmis laikant duotuosius taškus? Kiek iškiliųjų daugiakampių?

296. Plokštumoje nubrėžta m lygiagrečių tiesių. Be to, toje pačioje plokštumoje nubrėžta n tiesių, nelygiagrečių nei viena kitai, nei anksčiau nubrėžtosioms. Nė viena

tiesė neina per kitų dviejų tiesių susikirtimo tašką. Į kiek sričių tos tiesės padalija plokštumą?

297. Plokštumoje pasirinkta 11 taškų, iš kurių 5 priklauso vienam apskritimui. Kito apskritimo, kuriam priklausytų daugiau negu trys pasirinktieji taškai, nėra. Kiek galima nubrėžti apskritimų, kuriems priklauso bent po tris pasirinktuosius taškus?

298. Plokštumoje yra 10 tiesių, kurių kiekviena kerta visas kitas tieses, bet neina per kitų dviejų tiesių susikirtimo tašką; be to, nėra 4 tiesių, kurios liestų vieną apskritimą. Kiek galima nubrėžti apskritimų, liečiančių 3 iš 10 duotųjų tiesių?

299. Duotas iškilusis n-kampis. Pasirenkame k to n-kampio viršūnių, tarp pasirenkamųjų taškų palikdami bent po s nepasirinktų viršūnių, ir nubraižome iškilųjį k-kampį, kurio viršūnės sutampa su pasirinktaisiais taškais. Kiek tokių k-kampių galima nubraižyti?

300. Lygiagretainis kertamas dviem lygiagrečių tiesių pluoštais, kuriuose yra po r tiesių. Kiekvieno pluošto tiesės yra lygiagrečios atitinkamoms lygiagretainio kraštinėms. Kiek lygiagretainių gautoje figūroje?

301. Į kiek dalių suskaidomas iškilusis n-kampis, nubraižius jo įstrižaines, jei nė viena įstrižainė neina per kitų dviejų įstrižainių susikirtimo tašką, esantį n-kampio viduje?

302. Vienoje kortoje parašytas skaičius 1, dviejose – skaičius 2, trijose – skaičius 3 ir t. t. Įrodykite, kad iš dviejų kortų sudaryti sumą n yra $\frac{n}{12}(n^2-1)$ būdų, kai n – nelyginis skaičius, ir $\frac{n}{12}(n^2-4)$ būdų, kai n – lyginis.

303. Turime n vienodų daiktų ir $2n+1$ skirtingų daiktų. Įrodykite, kad iš tų $3n+1$ daiktų pasirinkti n daiktų yra 2^{2n} būdų.

304. Duota skaičių seka $1, 2, 3, \ldots, 2n$. Keliais būdais galima pasirinkti iš jos tris skaičius, sudarančius aritmetinę progresiją? Tas pats klausimas, kai skaičių seka yra tokia: $1, 2, 3, \ldots, 2n+1$.

305. Plokštumoje nubraižytos uždaros kreivės taip, kad kiekviena kreivė kerta bet kurią kitą kreivę bent dviejuose taškuose. Sakykime, kad n_r – skaičius taškų, kuriuose susikerta r kreivių. Įrodykite, kad tų kreivių lankai apriboja

$$1+n_2+2n_3+\ldots+rn_{r+1}+\ldots$$

uždarų sričių, kurių viduje nėra tokių lankų.

306. Plokštumoje nubraižyti du tiesių pluoštai su centrais taškuose A ir B. Vienam pluoštui priklauso m tiesių, kitam – n tiesių. Sakykime, kad nė viena tiesė nėra lygiagreti kitoms tiesėms ir neina per abu taškus A ir B. Į kiek dalių suskaido plokštumą tų pluoštų tiesės?

307. Ar galima kiekvieną iš 77 telefonų sujungti su 15 kitų tos sistemos telefonų?

308. Apskaičiuokite daugianario, kurį gausime, atlikę veiksmus reiškinyje

$$(7x^3-13y^2+5z^2)^{1964}(y^3-8y^2+6y+z)^2+(2x^2+18y^3-21)^{1965},$$

koeficientų sumą.

309. Dėžėje yra 100 rutuliukų: 28 raudoni, 20 žalių, 12 geltonų, 20 mėlynų, 10 baltų ir 10 juodų. Kiek mažiausiai rutuliukų reikia paimti iš tos dėžės, kad 15 paimtųjų rutuliukų tikrai būtų vienos spalvos?

310. Dažant kubą, galima arba visas jo sienas nudažyti baltai, arba visas sienas – juodai, arba keletą sienų – baltai, o kitas – juodai. Kiek yra skirtingų nudažymo variantų? (Du kubai laikomi nudažytais skirtingai, kai jų neįmanoma supainioti bet kaip sukinėjant.)

311. Išspręskite panašų uždavinį, kuriame kalbama ne apie sienų, o apie viršūnių dažymą.

312. Briaunainių modeliai gaminami iš plokščių išklotinių. Išklotinėje sienos yra sujungtos briaunomis, o modelis gaminamas, sulenkiant iš kartono pagamintą išklotinę per briaunas. Taisyklingasis tetraedras turi dvi skirtingas išklotines. Kiek jų turi kubas?

313. Taisyklingąjį dodekaedrą galima nudažyti 4 spalvomis taip, kad bet kurios gretimos sienos būtų skirtingos spalvos. Kiek geometriškai skirtingų sprendinių turi šis uždavinys?

314. Iš šešių tetraedro briaunų galima pasirinkti keturias briaunas, sudarančias uždarą erdvinį keturkampį. Tam keturkampiui priklauso visos tetraedro viršūnės. Tą patį galima padaryti ir su kubu: gausime aštuoniakampį, kuriam priklauso visos kubo viršūnės. Ar galima tai padaryti su oktaedru, dodekaedru, ikosaedru? Kiek gausime sprendinių kiekvienu atveju?

315. Koordinačių pradžioje yra dalelė. Per laiko vienetą ji suskyla į dvi daleles, ir viena naujoji dalelė pasislenka per ilgio vienetą į kairę, o kita — į dešinę. Tas procesas kartojasi per kiekvieną laiko vienetą. Dvi dalelės, susidūrusios viename taške, išnyksta (pavyzdžiui, po dviejų laiko vienetų lieka tik dvi dalelės). Kiek dalelių bus po 129 laiko vienetų? Po n laiko vienetų?

316. Vienoje abėcėlėje yra tik šešios raidės, kurioms perduoti telegrafu sudaryti tokie kodai:

$$\cdot;\ -;\ \cdot\cdot;\ --;\ \cdot-;\ -\cdot$$

Kartą, perduodamas žodį, telegrafistas nepadarė tarpų, skiriančių raidę nuo raidės. Todėl buvo perduota ištisinė taškų ir brūkšnių grandinėlė, sudaryta iš 12 ženklų. Kiek yra to žodžio perskaitymo variantų?

317. Kokių skaičių nuo 1 iki 10 000 000 yra daugiau: tų, kuriuos rašant vartojamas skaitmuo 1, ar tų, kuriuose to skaitmens nėra?

318. Iš taškų ir brūkšnių sudarinėjami visi galimi septyniaženkliai „žodžiai". Iš sudarytųjų žodžių išrenkame tuos, kurie vienas nuo kito skiriasi bent trim ženklais. Kiek tokių žodžių yra iš viso?

319. Keliais skirtingais būdais, turint n spalvų dažus, galima nudažyti apskritimą, padalytą į p dalių (p — pirminis skaičius)? Variantai, kurie sutampa vienas su kitu, sukant apskritimą apie centrą, laikomi vienodais.

320. Languoto popieriaus lape, turinčiame $n \times n$ langelių, surašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., n^2 (kiekviename langelyje parašyta po vieną skaičių). Skaičiai, surašyti bet kurioje horizontalėje arba vertikalėje, sudaro aritmetinę progresiją. Raskite tokių dėstinių skaičių.

321. Ant žmogaus galvos yra ne daugiau kaip 300 000 plaukų. Įrodykite, kad Maskvoje gyvena ne mažiau kaip 10 žmonių, turinčių vienodą plaukų kiekį (Maskvoje gyvena apie 6 milijonus žmonių*).

322. Įrodykite, kad iš $2n+1$ daiktų pasirinkti nelyginį skaičių daiktų yra tiek pat variantų, kiek ir variantų pasirinkti lyginį skaičių daiktų.

323. Vieno rublio monetą galima iškeisti arba 2 ir 5 kapeikų monetomis, arba 3 ir 5 kapeikų monetomis. Įrodykite, kad pirmuoju atveju yra daugiau keitimo variantų, negu antruoju.

324. Reikia iškeisti 20 kap. monetą 1, 2 ir 5 kap. monetomis. Kiek keitimo variantų gali būti?

325. Įrodykite, kad iš standartinio svarsčių rinkinio: 1 mg, 2 mg, 2mg, 5 mg, 10 mg, 20 mg, 20 mg, 50 mg, 100 mg, 200 mg, 200 mg, 500 mg, 1g ir t. t. galima sudaryti bet kokį svorį, išreikštą sveiku miligramų skaičiumi.

326. Yra 6 skaitmenys: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Apskaičiuokite sumą visų lyginių keturženklių skaičių, kuriuos galima parašyti tais skaitmenimis (skaitmenys gali kartotis).

327. Kortų komplektas, kuriame yra $2n$ kortų, maišomas šitaip: padalijus komplektą į dvi lygias dalis, pirmosios dalies kortos dedamos po vieną tarp antrosios dalies kortų (nekeičiant kortų eilės). Pavyzdžiui, $(n+1)$-oji korta tampa pirmąja, pirmoji — antrąja, $(n+2)$-oji — trečiąja, antroji — ketvirtąja ir t. t. Įrodykite, kad korta, kuri pradžioje buvo p-toje vietoje, po r maišymų pateks į vietą su numeriu x, jei x — skaičiaus $p2^r$ dalybos iš $2n+1$ liekana.

328. Įrodykite teiginį: jei komplekte yra $6m+2$ kortų, tai, maišant 327 uždavinyje nurodytu būdu, $(2m+1)$-oji korta visą laiką keisis vietomis su $(4m+2)$-ąja korta.

329. Įrodykite teiginį: jei kaladėje yra $14m+6$ kortų, tai po trijų maišymų 327 uždavinyje aprašytu būdu kortos, kurių numeriai pradžioje buvo $2m+1$, $2(2m+1)$, $3(2m+1)$, $4(2m+1)$, $5(2m+1)$ ir $6(2m+1)$, sugrįš į savo pradines vietas.

330. Jei 2^x-1 dalijasi iš $2n+1$, tai $2n$ kortų komplektas po x maišymų sugrįš į savo pradinę padėtį. Įrodykite šį teiginį.

---

* Tiek gyventojų buvo Maskvoje, kai buvo rašoma ši knyga. *Vertėjas*

331. Kortų komplektas maišomas taip: iš pradžių imama pirmoji korta, antroji dedama ant pirmosios, o trečioji – po pirmąja ir t. t. Įrodykite: jei komplekte yra $6n-2$ kortų, tai $2n$-toji korta liks vietoje.

332. Sakykime, kad 22 kortos maišomos ką tik aprašytu būdu. Įrodykite, kad 8-ji korta visą laiką lieka vietoje, 5-ji ir 14-ji keičiasi vietomis, o 3-ji, 13-ji ir 18-ji pakeičia viena kitą cikliškai.

333. Įrodykite, kad tomis pačiomis sąlygomis 16 kortų komplektas grįžta į savo pradinę padėtį po 5 maišymų, 32 kortų komplektas – po 6 maišymų, 42 kortų – po 8 maišymų, 28 ir 36 kortų – po 9 maišymų, 12, 20 ir 46 kortų – po 10 maišymų, 22 ir 52 kortų – po 12 maišymų, 14 kortų – po 14 maišymų, 18 kortų – po 18 maišymų, 26 kortų – po 26 maišymų, 30 kortų – po 30 maišymų, 50 kortų – po 50 maišymų.

334. Kvadratas padalytas į 16 kongruenčių kvadratėlių. Keliais būdais galima nudažyti tuos kvadratėlius baltais, juodais, raudonais ir mėlynais dažais, jei kiekvienoje horizontalėje ir kiekvienoje vertikalėje turi būti visos keturios spalvos?

335. Pasivaikščiojimui mokytojas rikiuoja 15 mokinių, sudarydamas 5 gretas po 3 mokinius gretoje. Kiek kartų juos galima surikiuoti taip, kad bet kurie du mokiniai neitų du kartus greta?

336. Įrodykite tokius teiginius: jei n – natūrinis skaičius, tai

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$$

– irgi natūrinis skaičius; jei m ir n – nelyginiai natūriniai skaičiai, tai

$$\frac{(mn)!}{(m!)^{\frac{n+1}{2}}(n!)^{\frac{m+1}{2}}}$$

– natūrinis skaičius.

337. Turime n daiktų, išdėstytų ratu. Juos perstatinėjame, nepalikdami nė vieno daikto po to daikto, po kurio jis stovėjo anksčiau. Įrodykite teiginį: jei f_n – nurodytųjų kėlinių skaičius, tai

$$f_n+f_{n+1}=D_n$$

(žr. p. 53).

338. Kiek sveikųjų sprendinių turi lygtis $x_1+x_2+\ldots+x_p=m$, jei kintamieji x_1, x_2, ..., x_p tenkina nelygybes $0\leqslant l\leqslant x_k\leqslant n$?

339. Turime 7 vienos knygos egzempliorius, 8 kitos knygos egzempliorius ir 9 trečios knygos egzempliorius. Keliais būdais galima paskirstyti jas dviem asmenims, jei abu turi gauti po 12 knygų?

340. Parašyti visi n-elemenčiai deriniai su pasikartojimais iš n raidžių. Įrodykite, kad kiekvieną raidę reikėjo parašyti C_{2n-1}^n kartų.

341. Nuo A iki B yra 999 km. Prie kelio stovi kilometriniai stulpai, ant kurių parašyti atstumai iki A ir iki B: (0; 999), (1; 998), ..., (999; 0). Kiek yra tokių stulpų, ant kurių parašyti tik du skirtingi skaitmenys?

342. Sudarinėjami visi gretiniai su pasikartojimais iš m baltų ir n juodų rutulių. Įrodykite, kad tų gretinių skaičius lygus $P(m+1,\ n+1)-2$.

343. Sudaryti visi gretiniai su pasikartojimais iš m baltų ir n juodų rutulių. Įrodykite, kad visuose gretiniuose yra

$$1+\frac{mn+m-1}{n+2}\,P(m+1,\ n+1)$$

baltųjų rutulių ir

$$1+\frac{mn+n-1}{m+2}\,P(m+1,\ n+1)$$

juodųjų rutulių. Uždavinio atsakymą patikrinkite, nagrinėdami gretinius iš šūksnio „ohoho“ raidžių.

344. Iš m baltų rutulių, n juodų rutulių ir vieno raudono rutulio sudarinėjami visi gretiniai po $1, 2, \ldots, m+n+1$ elementų. Įrodykite, kad gretinių, kuriuose yra raudonasis rutulys, skaičius lygus

$$1+\frac{mn+m+n}{m+n+4}P(m+2,\ n+2).$$

345. Iš m baltų rutulių, n juodų rutulių ir vieno raudono rutulio galima sudaryti iš viso

$$\frac{(m+1)(n+1)}{m+n+3}P(m+2,\ n+2)-1$$

gretinių. Įrodykite tai ir patikrinkite, nagrinėdami gretinius iš žodžio „atmata" raidžių.

346. Turiu 7 draugus. Vieną savaitę kasdien kviečiuosi po 3 draugus pietų, stengdamasis, kad tie patys 3 draugai nesusitiktų pas mane du kartus. Kiek skirtingų kvietimo variantų gali būti?

347. Jei norėčiau turėti 7 skirtingas kompanijas po 3 draugus, nepalikdamas nė vieno draugo nepakviesto, tai tą padaryti būtų

$$A_{35}^{7}-7A_{20}^{7}+21A_{10}^{7}$$

būdų.

348. Jei norėčiau turėti 7 skirtingas kompanijas po 3 draugus, bet nė vieno draugo nekviesčiau kasdien, tai tą padaryti būtų

$$A_{35}^{7}-7A_{15}^{7}$$

būdų.

349. Iš n daiktų ($n\geqslant 2$) sudarinėjami gretiniai po $1, 2, \ldots, n$ daiktų. Įrodykite, kad visų tokių gretinių skaičius yra lygus didžiausiam natūriniam skaičiui, mažesniam už $en!-1$.

350. Jei sudarytume visus tuos gretinius, tai kiekvienas daiktas juose būtų pavartotas vienodą skaičių kartų. Įrodykite, kad tas skaičius yra mažiausias natūrinis skaičius, didesnis už $e(n-1)\times(n-1)!$.

351. Moneta metama $2n$ kartų. Tiriami tie variantai, kuriuose herbas bet kuriuo momentu yra atsivertęs ne daugiau kartų, negu skaičius. Įrodykite, kad tokių variantų skaičius lygus

$$1+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

352. Kiek yra būdų trims asmenims išdalyti $3n$ skirtingų knygų, jei knygų skaičiai turi sudaryti aritmetinę progresiją?

353. Yra n porų, sudarytų iš vienodų raidžių; skirtingas poras sudaro skirtingos raidės. Tos raidės visais galimais būdais išdėstomos į eilę, stengiantis, kad dvi vienodos raidės nestovėtų greta. Įrodykite, kad skirtingų dėstinių skaičius lygus

$$\frac{1}{2^n}\left[(2n)!-\frac{n}{1}2(2n-1)!+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2^2(2n-2)!-\ldots\right].$$

354. Yra r skirtingų daiktų, kuriuos turi pasidalyti $n+p$ asmenų taip, kad n žmonių tikrai gautų bent po vieną daiktą. Įrodykite, kad tokios dalybos gali turėti

$$(n+p)^r-n(n+p-1)^r+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n+p-2)^r+\ldots$$

skirtingų baigčių.

355. Visų galimų skirstinių skaičių, kai n skirtingų daiktų skirstoma į k grupių, pažymėkime Π_n^k. Įrodykite: jei $n>1$, tai

$$1-\Pi_n^2+2!\,\Pi_n^3-3!\,\Pi_n^4+\ldots=0.$$

356. Duota m dėžučių, kuriose sudėti daiktai: pirmoje yra n daiktų, antroje — $2n$ daiktų, ..., m-toje — mn daiktų. Keliais būdais galima pasiimti po n daiktų iš kiekvienos dėžutės?

357. Pintinėje yra $2n+r$ obuolių ir $2n-r$ kriaušių. Įrodykite: jei n — fiksuotas skaičius, tai n obuolių ir n kriaušių ėminių skaičius yra didžiausias, kai $r=0$.

358. Iškiliojo 1000-kampio viršūnės ir 500 jo viduje pasirinktų taškų sudaro 1500 taškų aibę, kurioje nėra trijų taškų, priklausančių vienai tiesei. Šis 1000-kampis padalytas į trikampius taip, kad visi nurodytieji taškai yra trikampių viršūnės, o kitų viršūnių tie trikampiai neturi. Kiek gauta trikampių?

359. Penki žmonės sužaidė keletą domino partijų (du prieš du). Kiekvienas žaidėjas kitam žaidėjui vieną kartą buvo partneris, o du kartus — priešininkas. Kiek partijų sužaista ir kiek yra žaidėjų pasiskirstymo variantų?

360. Plokštumoje braižomos uždaros laužtės, kurių ilgis lygus $2n$, o pradžia sutampa su tašku O. Tų laužčių kraštinės yra languoto popieriaus linijose (langelio kraštinės ilgis lygus 1). Raskite tokių laužčių skaičių, jei laužtė gali eiti ta pačia atkarpa po keletą kartų.

361. Popieriaus lape sudarytas n horizontalių ir n vertikalių tiesių tinklas. Braižome uždaras laužtes, turinčias $2n$ grandžių — po vieną grandį kiekvienoje horizontalėje ir kiekvienoje vertikalėje. Kiek tokių laužčių galima nubraižyti iš viso?

362. Įmonė gamina vaikiškus barškučius, kurie sudaryti iš 3 raudonų ir 7 mėlynų rutuliukų, užmautų ant žiedo. Kiek skirtingų barškučių galima pagaminti (du barškučiai laikomi vienodais, jei vieną galima gauti iš kito, stumdant rutuliukus žiedu arba perverčiant žiedą)?

363. Susirinko n žmonių. Kai kurie iš jų yra pažįstami vienas su kitu. Bet kurie du nepažįstamieji turi tik du bendrus pažįstamus, o bet kurie du pažįstamieji bendrų pažįstamų neturi. Įrodykite, kad visi susirinkimo dalyviai turi po vienodą skaičių pažįstamųjų.

364. Apskritime pasirinkta $a+b$ taškų: a taškų, pažymėtų raide A, ir b taškų, pažymėtų B. Prie kiekvieno lanko, kurio galai pažymėti raidėmis A, rašome skaičių 2; prie lanko, kurio galai pažymėti raidėmis B, rašome skaičių $\frac{1}{2}$; prie lanko, kurio galai pažymėti skirtingomis raidėmis, rašome skaičių 1. Įrodykite, kad visų parašytųjų skaičių sandauga lygi 2^{a-b}.

365. Šachmatų lentos horizontalės dažniausiai žymimos skaitmenimis nuo 1 iki 8, o vertikalės — raidėmis a, b, c, d, e, f, g, h. Sakykime, kad tos raidės — bet kokie skaičiai. Kiekviename lentos langelyje parašome sandaugą, kurią gauname, sudauginę skaičius, reiškiančius to langelio horizontalės ir vertikalės numerius. Apskaičiuokite sandaugą tų skaičių, kuriuos uždengia 8 bokštai, nekertą vienas kito.

366. Olimpiados organizacinis komitetas susideda iš 11 žmonių. Olimpiados medžiaga saugoma seife. Kiek spynų turi seifas ir kiek raktų kiekvienas organizacinio komiteto narys, jei atidaryti seifą įmanoma, kai susirenka bet kurie 6 organizacinio komiteto nariai, bet neįmanoma, kai susirenka mažiau negu 6 nariai?

367. Grandinė turi 60 grandžių. Kiekviena grandis sveria 1 g. Kiek mažiausiai grandžių reikia perkirsti, norint iš perkirstųjų grandžių ir gautųjų grandinės gabalų sudaryti bet kokį svorį, reiškiamą sveiku skaičiumi nuo 1 iki 60? Išspręskite tą patį uždavinį, tardami, kad sveriama dvilėkštėmis svarstyklėmis.

368. Ieškomi įterpti tarp 1 ir 1000 sveikieji skaičiai x ir y, kurių kvadratų suma x^2+y^2 dalijasi iš 49. Kiek tokių skaičių porų yra?

369. Dviženklį skaičių sudėję su skaičiumi, parašytu tais pačiais, tik sukeistais vietomis skaitmenimis, kartais gauname sveikojo skaičiaus kvadratą. Raskite visus tokius skaičius.

370. Apskaičiuokite sumą visų keturženklių skaičių, kurie parašomi skaitmenimis 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir dalijasi iš 3.

371. Apskaičiuokite sumą visų lyginių keturženklių skaičių, kurie parašomi skaitmenimis 0, 1, 2, 3, 4, 5.

372. Kiek skirtingų sveikųjų sprendinių turi nelygybė $|x|+|y|\leqslant 1000$?

373. Apskritimo pasirinkti taškai $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$. Nagrinėjami visi iškilieji daugiakampiai, kurių viršūnės yra kai kurie pasirinktieji taškai. Tie daugiakampiai skirstomi į dvi grupes, pirmajai grupei priskiriant visus daugiakampius, kurių viena viršūnė yra taškas A_1, antrajai — visus likusius daugiakampius. Kurioje grupėje daugiau daugiakampių?

374. Begalinėje šachmatų lentoje stovi žirgas. Raskite skaičių langelių, į kuriuos jis gali patekti, padaręs $2n$ ėjimų.

375. Yra 1955 taškai. Iš tų taškų sudarinėjami trejetai taip, kad bet kurie du trejetai turėtų bendrą tašką. Koks didžiausias tokių trejetų skaičius?

376. Skaičiai nuo 1 iki 100 000 000 parašyti iš eilės be protarpių, todėl susidarė skaitmenų seka 123456... 100 000 000. Įrodykite, kad visų tos sekos skaitmenų skaičius lygus sekos 1, 2, 3, ..., 10^9 nulių skaičiui.

377. Kiek yra keturženklių skaičių, kurių pirmųjų dviejų skaitmenų suma lygi kitų dviejų skaitmenų sumai, jei keturženkliais laikomi skaičiai nuo 0000 iki 9999?

378. Mokykloje mokomasi $2n$ dalykų. Visi mokiniai mokosi tik gerais ir labai gerais pažymiais. Nėra dviejų mokinių, kurie mokytųsi vienodai, bet negalima ir pasakyti, kad kuris nors mokinys mokosi geriau už kitą. Įrodykite, kad toje mokykloje yra ne daugiau kaip C_{2n}^{n} mokinių (mokinys laikomas geriau besimokančiu už kitą mokinį, kai pirmojo pažymiai iš visų dalykų nėra blogesni už antrojo, o iš kai kurių dalykų — geresni).

379. Sakykime, kad M_r — skaičius gretinių be pasikartojimų iš m elementų po r, o N_r — skaičius gretinių be pasikartojimų iš n elementų po r. Įrodykite, kad skaičius gretinių iš $m+n$ elementų po r reiškiamas formule $(M+N)^r$, kurioje, dvinarį pakėlus laipsniu, reikia rodiklius pakeisti indeksais.

380. Raskite laipsnio $(1+x^2-x^3)^9$ dėstinio koeficientą prie x^8.

381. Sužinokite, koks koeficientas bus prie laipsnio x^m, kai sumą

$$(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+\ldots+(1+x)^n$$

išreikšime x laipsniais. Išnagrinėkite atskirai atvejus $m<k$ ir $m\geqslant k$.

382. Sužinokite, kokie koeficientai bus prie x^{17} ir prie x^{18}, kai pakelsime laipsniu $(1+x^5+x^7)^{20}$ ir sutrauksime panašiuosius narius.

383. Kuriame reiškinyje: $(1+x^2-x^3)^{1000}$ ar $(1-x^2+x^3)^{1000}$, pakėlę laipsniu ir sutraukę panašiuosius narius, gausime didesnį koeficientą prie x^{17}?

384. Sakykime, kad $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — laipsnio $(1+x+x^2)^n$ dėstinio didėjančiais x laipsniais koeficientai. Įrodykite, kad

a) $a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-\ldots-a_{2n-1}a_{2n}=0$,

b) $a_0^2-a_1^2+a_2^2-\ldots+(-1)^{n-1}a_{n-1}^2=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}(-1)^{n-1}a_n^2$,

c) $a_r-na_{r-1}+C_n^2a_{r-2}-\ldots+(-1)^rC_n^ra_0=0$, kai r nesidalija iš 3,

d) $a_0+a_2+a_4+\ldots=\frac{1}{2}(3^n+1)$,

$a_1+a_3+a_5+\ldots=\frac{1}{2}(3^n-1)$.

385. Sužinokite, kiek skirtingų (nepanašių vienas į kitą) narių yra dėstinyje, kurį gauname, pakėlę laipsniu

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^3.$$

386. Raskite koeficientą prie x^k dėstinyje

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})^2.$$

387. Įrodykite, kad

$$\frac{(C_{n+1}^{r+1}-C_n^r)\,C_{n-1}^{r-1}}{(C_n^r)^2-C_{n+1}^{r+1}C_{n-1}^{r-1}}=r.$$

388. Įrodykite, kad

$$C_n^1+6C_n^2+6C_n^3=n^3,$$

$$1+7C_n^1+12C_n^2+6C_n^3=(n+1)^3.$$

389. Įrodykite, kad

$$1+14C_n^1+36C_n^2+24C_n^3=(n+1)^4-n^4,$$

$$C_n^1+14\,C_n^2+36\,C_n^3+24\,C_n^4=n^4.$$

390. Įrodykite, kad

$$1-3C_n^2+9C_n^4-27C_n^6+\ldots=(-1)^n 2^n\cos\frac{2n\pi}{3},$$

$$C_n^1-3C_n^3+9C_n^5-\ldots=\frac{(-1)^{n+1}2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

391. Įrodykite, kad

a) $C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$,

b) $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$,

c) $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$,

d) $C_n^0+C_n^4+C_n^8+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$.

392. Įrodykite, kad tuo atveju, kai $n\geqslant 2$, o $|x|\leqslant 1$, teisinga tokia nelygybė:

$$(1+x)^n+(1-x)^n\leqslant 2^n.$$

393. Įrodykite, kad tuo atveju, kai $m>n$,

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{m(m-1)\ldots(m-x+1)}=\frac{m+1}{m-n+1},$$

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}}=\frac{2n+1}{n+1}.$$

394. Įrodykite, kad

$$\frac{m}{1}+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}=$$

$$=\frac{n}{1}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\cdot 2\ldots m}.$$

395. Įrodykite, kad

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^{x}}=\frac{2}{n+1}.$$

396. Įrodykite, kad

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^{x}}=\frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}.$$

397. Įrodykite, kad

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_{n+q}^{x}}=\frac{2(n+q+1)}{(q+1)(q+2)(q+3)}.$$

398. Įrodykite, kad

$$(C_n^1)^2+2(C_n^2)^2+3(C_n^3)^2+\ldots+n(C_n^n)^2=\frac{(2n-1)!}{\left((n-1)!\right)^2}.$$

399. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{((n-1)!)^2}+\frac{1}{1!\,2!}\cdot\frac{1}{((n-2)!)^2}+\frac{1}{2!\,3!}\cdot\frac{1}{((n-3)!)^2}+\ldots=\frac{(2n-1)!}{(n!\,(n-1)!)^2}.$$

400. Įrodykite, kad

$$\frac{(n+r-1)!}{r!}-\frac{n}{1}\cdot\frac{(n+r-3)!}{(r-2)!}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(n+r-5)!}{(r-4)!}-\ldots=\frac{n!\,(n-1)!}{r!\,(n-r)!}.$$

401. Apskaičiuokite tokias sumas:

a) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n$,

b) $C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)\,C_n^n$,

c) $C_n^2+2C_n^3+3C_n^4+\ldots+(n-1)\,C_n^n$,

d) $C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+\ldots+(2n-1)\,C_n^n$,

e) $C_n^0-2C_n^1+3C_n^2-\ldots+(-1)^n(n+1)\,C_n^n$,

f) $3C_n^1+7C_n^2+11C_n^3+\ldots+(4n-1)\,C_n^n$,

g) $C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n$,

h) $\frac{C_n^0}{1}+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+\ldots+\frac{C_n^n}{n+1}$,

i) $\frac{C_n^0}{2}+\frac{C_n^1}{3}+\frac{C_n^2}{4}+\ldots+\frac{C_n^n}{n+2}$,

k) $\frac{C_n^0}{1}-\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{n+1}$,

l) $(C_n^0)^2-(C_n^1)^2+(C_n^2)^2-\ldots+(-1)^n(C_n^n)^2$.

402. Raskite didžiausiuosius laipsnių $(a+b+c)^{10}$ ir $(a+b+c+d)^{14}$ dėstinių koeficientus.

403. Funkcijos $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ dėstinio laipsnine eilute koeficientus žymėkime Y_n:

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=1+Y_1x+Y_2x^2+\ldots$$

Išreikškite Y_n binominiais koeficientais. Parašykite funkcijos $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ dėstinį.

404. Įrodykite, kad skaičiai Y_n yra susieti tokiomis lygybėmis:

a) $Y_n+\frac{1}{2}Y_1Y_{n-1}+\frac{1}{3}Y_2Y_{n-2}+\ldots+\frac{1}{n+1}Y_n=\frac{1}{2}Y_{n+1}$,

b) $Y_0Y_n+Y_1Y_{n-1}+Y_2Y_{n-2}+\ldots+Y_nY_0=4^n$,

c) $\frac{Y_0Y_n}{1(n+1)}+\frac{Y_1Y_{n-1}}{2\cdot n}+\frac{Y_2Y_{n-2}}{3(n-1)}+\ldots+\frac{Y_nY_0}{(n+1)\cdot 1}=\frac{Y_{n+1}}{n+2}$.

405. Kiekvienas skaičių trikampio

```
      1
    1 1 1
  1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
. . . . . . . . . . . .
```

elementas gaunamas, sudėjus skaičius, parašytus pirmesnėje eilutėje virš to elemento ir virš jo kaimynų iš dešinės ir iš kairės (jei kurio nors skaičiaus trūksta, jis laikomas

lygiu nuliui). Įrodykite, kad kiekvienoje eilutėje (pradedant trečiąja) yra bent vienas lyginis skaičius.

406. Pirmoji skaičių trikampio

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 \cdots\cdots & 1957 & & 1958 \\ & 1 & 3 & 5 \quad \cdots\cdots\cdots & & 3915 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}$$

eilutė sudaryta iš skaičių 0, 1, ..., 1958. Kiekvienos tolesnės eilutės elementas gaunamas, sudėjus skaičius, parašytus pirmesnėje eilutėje iš kairės ir iš dešinės nuo ieškomojo elemento. Įrodykite, kad paskutinės eilutės elementas dalijasi iš 1958.

407. Nagrinėjama Fibonačio skaičių seka: $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=2$, $u_4=3$, $u_5=5$ ir t. t. (seką sudarėme iš nulinio ir pirmojo nario, o ne iš pirmojo ir antrojo nario, kaip VI skyriuje). Įrodykite, kad

a) su bet kokiomis natūrinėmis m ir n reikšmėmis

$$u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_n u_{m+1};$$

b) su bet kokiomis natūrinėmis m ir $n=km$ reikšmėmis skaičius u_n dalijasi iš u_m;

c) du gretimieji Fibonačio sekos nariai yra reliatyviai pirminiai skaičiai.

408. Raskite 1000-jo ir 770-jo Fibonačio sekos narių bendrą didžiausią daliklį.

409. Ar tarp pirmojo Fibonačio sekos nario ir 100 000 001-jo nario yra nors vienas narys, kurio keturi paskutiniai skaitmenys lygūs 0?

410. Iš Fibonačio sekos paimti 8 iš eilės parašyti nariai. Įrodykite, kad jų suma nėra Fibonačio sekos narys.

411. Įrodykite, kad

a) $u_2+u_4+\ldots+u_{2n}=u_{2n+1}-1$,

b) $u_1+u_3+\ldots+u_{2n-1}=u_{2n}$,

c) $u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2=u_n u_{n+1}$,

d) $u_{n+1}^2=u_n u_{n+2}+(-1)^n$,

e) $u_1 u_2+u_2 u_3+\ldots+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}^2$,

f) $u_1 u_2+u_2 u_3+\ldots+u_{2n}u_{2n+1}=u_{2n+1}^2-1$,

g) $nu_1+(n-1)u_2+(n-2)u_3+\ldots+2u_{n-1}+u_n=u_{n+4}-(n+3)$,

h) $u_3+u_6+\ldots+u_{3n}=\frac{1}{2}(u_{3n+2}-1)$,

i) $u_{3n}=u_{n+1}^3+u_n^3-u_{n-1}^3$.

412. Įrodykite, kad bet kurį natūrinį skaičių N galima išreikšti Fibonačio skaičių suma, kurioje nėra gretimų tos sekos skaičių ir, be to, kiekvienas Fibonačio skaičius imamas dėmeniu ne daugiau kaip vieną kartą.

413. Natūriniai skaičiai p, q ir r tenkina tokias sąlygas: $p\geqslant q\geqslant r$, $p<q+r$, $p+q+r=2s$. Turime p juodų, q baltų ir r raudonų rutulių, kuriuos dalijame dviem asmenims, kiekvienam duodami po s rutulių. Įrodykite, kad dalybų baigčių skaičius lygus

$$s^2+s+1-\frac{1}{2}(p^2+q^2+r^2).$$

414. Jei $q+r<p$, tai prie praeito uždavinio atsakymo reikia pridėti $\frac{1}{2}(p-s)(p-s-1)$.

415. Yra $pq+r$ skirtingų daiktų; $0\leqslant r<p$. Jie dalijami p asmenų grupei, stengiantis padalyti kuo lygiau (kiekvienam duodama arba q, arba $q+1$ daiktų). Įrodykite, kad tų dalybų galimų baigčių skaičius lygus

$$C_p^r\,\frac{(pq+r)!}{(q+1)^r(q!)^p}.$$

416. Apskaičiuokite sumą

$$\sum_{i_n=1}^{m} \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \cdots \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1.$$

417. Įrodykite tapatybę

$$C_{n+m}^{m}=\Sigma P(k_1, \ldots, k_m, n-k_1-\ldots-k_m+1),$$

kurios dešinėje pusėje sumuojama, imant visus sveikuosius neneigiamus lygties $k_1+2k_2+\ldots+mk_m=N$ sprendinius.

418. Raskite žemiau parašytų rekurentinių sąryšių bendruosius sprendinius:

a) $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$,

b) $a_{n+2}+3a_{n+1}-10a_n=0$,

c) $a_{n+2}-4a_{n+1}+13a_n=0$,

d) $a_{n+2}+9a_n=0$,

e) $a_{n+2}+4a_{n+1}+4a_n=0$,

f) $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0$,

g) $a_{n+3}+3a_{n+2}+3a_{n+1}+a_n=0$,

h) $a_{n+4}+4a_n=0$.

419. Raskite a_n, kai duotas rekurentinis sąryšis ir pirmieji sekos nariai:

a) $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$, $a_1=1$, $a_2=-7$,

b) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$, $a_1=2$, $a_2=4$,

c) $a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=0$, $a_1=-\frac{1}{4}$, $a_2=-\frac{1}{4}$,

d) $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0$, $a_1=1$, $a_2=-3$, $a_3=-29$.

420. Raskite seką, kai žinoma, kad $a_1=\cos\alpha$, $a_2=\cos 2\alpha$ ir, be to,

$$a_{n+2}-2\cos\alpha\, a_{n+1}+a_n=0.$$

421. Įrodykite, kad seka su bendruoju nariu $a_n=n^k$ tenkina sąryšį

$$a_{n+k}-C_k^1 a_{n+k-1}+C_k^2 a_{n+k-2}+\ldots+(-1)^k C_k^k a_n=0.$$

422. Raskite seką, žinodami, kad

$$a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=2^n.$$

423. Remdamiesi tapatybe $(1+x)^p(1+x)^{-k-1}=(1+x)^{p-k-1}$, įrodykite, kad*

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{k+s}^{s} C_p^{n-s}=C_{p-k-1}^{n}.$$

424. Remdamiesi tapatybe $(1-x)^{-m-1}(1-x)^{-q-1}=(1-x)^{-m-q-2}$, įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} C_{p-s}^{m} C_{q-s}^{q}=C_{p+q+1}^{p-m}.$$

---

* Čia ir visur toliau sumuojama tik pagal tas sveikas neneigiamas s reikšmes, su kuriomis apibrėžta kairioji lygybės pusė.

425. Remdamiesi tapatybe $(1+x)^n=(1-x^2)^n(1-x)^{-n}$, įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{n+k-2s}^n C_{n+1}^s = C_{n+1}^k.$$

426. Remdamiesi tapatybe $(1+x)^n(1-x^2)^{-n}=(1-x)^{-n}$, įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} C_n^{k-2s} C_{n+s-1}^s = C_{n+k-1}^k.$$

427. Remdamiesi tapatybe $(1-x^2)^{-p-1}=(1+x)^{-p-1}(1-x)^{-p-1}$, įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{p+2k-s}^p C_{p+s}^s = C_{n+k-1}^k.$$

428. Remdamiesi tapatybėmis

$$(1-x)^{-2p}\left(1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)^{-p}=(1-2x)^{-p}$$

ir

$$(1-x)^{2p}\left(1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)^{p}=(1-2x)^{p},$$

įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} C_{p+s}^s C_{2p+m}^{2p+2s+1} = 2^{m-1} C_{m+p-1}^p,$$

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_p^s C_{2p-2s}^{m-2s} = 2^p C_p^m.$$

429. Įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} C_{p+s}^s C_{2p+m}^{2p+2s} = 2^{m-1}\cdot\frac{2p+m}{m} C_{m+p-1}^p.$$

430. Remdamiesi tapatybėmis

$$(1-x)^{\pm 2p}\left(1+\frac{2x}{(1-x)^2}\right)^{\pm p}=(1+x^2)^{\pm p},$$

išveskite tokias formules:

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{p+s-1}^s C_{2m+2p+s}^{2m+1-s} 2^s = 0,$$

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{p+s-1}^s C_{2m+2p+s-1}^{2m-s} 2^s = (-1)^m C_{p+m-1}^m$$

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_p^s C_{2p-2s}^{2m+1-s} 2^s = 0,$$

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_p^s C_{2p-2s}^{2m-s} 2^s = C_p^m.$$

Remdamiesi gautosiomis lygybėmis, įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} C_{2p+2m}^{2s} C_{p+m-s}^{p} = 2^{2m}(p+m)\frac{(p+2m-1)!}{p!\,(2m)!},$$

$$\sum_{s=0} C_{2p+2m+1}^{2s+1} C_{p+m-s}^{p} = 2^{2m}(2p+2m+1)\frac{(p+2m)!}{p!\,(2m+1)!},$$

$$\sum_{s=1} C_{2p+2m}^{2s-1} C_{p+m-s}^{p} = 2^{2m-1} C_{p+2m-1}^{p},$$

$$\sum_{s=0} C_{2p+2m+1}^{2s} C_{p+m-s}^{p} = 2^{2m} C_{p+2m}^{p}.$$

431. Nagrinėdami tapatybes

$$\left((1+x)^p \pm (1-x)^p\right)^2 = (1+x)^{2p} + (1-x)^{2p} \pm 2(1-x^2)^p,$$

$$\left((1+x)^p + (1-x)^p\right)\left((1+x)^p - (1-x)^p\right) = (1+x)^{2p} - (1-x)^{2p}$$

su teigiamomis ir neigiamomis p reikšmėmis, įrodykite, kad

$$2\sum_{s=0} C_p^{2s} C_p^{2m-2s} = C_{2p}^{2m} + (-1)^m C_p^m,$$

$$2\sum_{s=0} C_p^{2s+1} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p}^{2m+2} + (-1)^m C_p^{m+1},$$

$$2\sum_{s=0} C_p^{2s} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p}^{2m+1},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s}^{p} C_{p+2m-2s}^{p} = C_{2p+2m+1}^{2p+1} + C_{p+m}^{p},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s}^{p-1} = C_{2p+2m+1}^{2p-1} - C_{p+m}^{p},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s}^{p} C_{p+2m-2s+1}^{p} = C_{2p+2m+2}^{2p+1}.$$

432. Nagrinėdami reiškinį

$$\left((1+x)^{p+1} \pm (1-x)^{p+1}\right)\left((1+x)^p \pm (1-x)^p\right)$$

su visomis ženklų kombinacijomis, išveskite tokias formules:

$$2\sum_{s=0} C_{p+1}^{2s} C_p^{2m-2s} = C_{2p+1}^{2m} + (-1)^m C_p^m,$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+1}^{2s} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p+1}^{2m+1} - (-1)^m C_p^m,$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+1}^{2s+1} C_p^{2m-2s} = C_{2p+1}^{2m+1} + (-1)^m C_p^m,$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+1}^{2s+1} C_{p}^{2m-2s+1} = C_{2p+1}^{2m+2} + (-1)^m C_{p}^{m+1},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s-1}^{p-1} C_{p+2m-2s}^{p} = C_{2p+2m}^{2p} + C_{p+m}^{p},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s-1}^{p-1} C_{p+2m-2s+1}^{p} = C_{2p+2m+1}^{2p} + C_{p+m}^{p},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s}^{p} = C_{2p+2m+1}^{2p} - C_{p+m}^{p},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s+1}^{p} = C_{2p+2m+2}^{2p} - C_{p+m+1}^{p}.$$

433. Remdamiesi tapatybe

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^m (1-x)^{-n-1} = \frac{(-1)^m}{x^m}(1-x)^{m-n-1},$$

įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{m}^{m-k+s} C_{n+s}^{n} = C_{m+n-1}^{k}.$$

434. Įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_m^s C_s^n = \begin{cases} 0, & \text{kai } m \neq n, \\ (-1)^n, & \text{kai } m = n. \end{cases}$$

435. Remdamiesi tapatybe

$$(1-x)^{-n}(1-x^h)^n = (1+x+\ldots+x^{h-1})^n,$$

įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{m-sh}^{n-1} \; C_n^s = \begin{cases} 0, & \text{kai } m > hn-1; \\ 1, & \text{kai } m = hn-1. \end{cases}$$

436. Remdamiesi tapatybe

$$(1-x)^{-n-1}(1-x^h)^n = \frac{(1+x+\ldots+x^{h-1})^n}{1-x}$$

ir tardami, kad $m \geqslant hn$, įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{m-sh}^{n} C_n^s = h^n.$$

437. Remdamiesi tapatybe

$$(1+x)^{\pm p}(1-x)^{\pm p} = (1-x^2)^{\pm p},$$

įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_p^{m-s} C_p^s = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_p^{\frac{m}{2}}, & \text{kai } m \text{ lyginis}, \\ 0, & \text{kai } m \text{ nelyginis}; \end{cases}$$

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{p+m-s}^{p} C_{p+s}^{p} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_{p+\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}, & \text{kai } m \text{ lyginis,} \\ 0, & \text{kai } m \text{ nelyginis.} \end{cases}$$

438. Įrodykite, kad

$$\sum_{s=0} (-1)^s (C_m^s)^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_m^{\frac{m}{2}}, & \text{kai } m \text{ lyginis,} \\ 0, & \text{kai } m \text{ nelyginis.} \end{cases}$$

439. Simboliu $(a)_n$ žymime sandaugą

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1).$$

Įrodykite, kad

$$(a+b)_n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (a+m)_{n-m} (b-m+1)_m.$$

SPRENDIMAI IR ATSAKYMAI

1. Remdamiesi dauginimo taisykle, gauname $5 \cdot 3 = 15$ kelių.
2. Pagal tą pačią taisyklę turime $100^2 = 10\,000$ pasirinkimo variantų.
3. 20.
4. 8.
5. 9.
6. 48.
7. 25; 20.
8. 480; 437.
9. 1024; 4032.
10. Pasirenkame baltąjį langelį (32 variantai) ir išbraukiame atitinkamą horizontalę ir vertikalę. Likusioje lentos dalyje yra 24 juodi langeliai. Todėl yra $32 \cdot 24 = 768$ pasirinkimo variantai.
11. Pagal dauginimo taisyklę: $12 \cdot 9 \cdot 10 = 1080$ būdų.
12. $6 \cdot 5 = 30$ variantų.
13. $3 \cdot 7 \cdot 7 = 147$.
14. Galima pirkti arba po vieną kiekvieno romano egzempliorių, arba vieno romano egzempliorių ir tomą, kuriame yra kiti du romanai. Remdamiesi dauginimo ir sumavimo taisyklėmis, gauname $6 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 134$ variantus.
15. Dar galima pirkti vieną „Bajorų gūžtos" egzempliorių ir tomą, kuriame yra „Rudinas" ir „Tėvai ir vaikai". Prisideda $3 \cdot 3 = 9$ variantai, todėl iš viso turime 143 variantus.
16. Daugiau pasirinkimo variantų yra tada, kai imamas obuolys, nes $11 \cdot 10 > 12 \cdot 9$.
17. $6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$. Jei du pirmieji vilkeliai apvirsta ant šono su „1", tai trečiasis gali apvirsti 10 būdų. Panašiai nagrinėjami ir atvejai, kai ant to šono apvirsta kiti vilkeliai. Iš viso susidarytų $6 + 8 + 10$ variantų, bet vienas variantas (visi trys vilkeliai virsta ant šono „1") skaitomas tris kartus, todėl yra tik 22 variantai.
18. Kadangi spalvų eilė neturi reikšmės, tai yra $C_5^3 = 10$ variantų.
19. Čia spalvų eilė jau svarbi; todėl turime $A_5^3 = 60$ variantų. Jei viena juosta turi būti raudona, tai variantų skaičius lygus $3 \cdot A_4^2 = 36$.
20. $A_5^2 = 20$ žodynų.
21. $A_{10}^2 - A_5^2 = 70$.
22. Gauname gretinius su pasikartojimais iš 13 kortų po 4. Iš viso $13^4 = 28\,561$ būdas. Jei neturi būti porų, tai turime gretinius be pasikartojimų; jų skaičius $A_{13}^4 = 17\,160$.
23. Kadangi užtenka pasirinkti vieną juodą ir vieną raudoną kortą, tai gauname $13^2 = 169$ variantus.
24. Vaikui galima duoti arba vieną, arba du, arba tris skirtingus vardus. Iš viso $300 + 300 \cdot 299 + 300 \cdot 299 \cdot 298 = 26\,820\,600$ skirtingų vardų.
25. Bet kurie du kaimynai neišskiriami, kai kilnojama cikliškai arba atspindima simetriškai. Sodinant 4 žmones, yra $2 \cdot 4 = 8$ transformacijos, kurios neišskiria kaimynų. Kadangi iš 4 žmonių galima sudaryti $4! = 24$ kėlinius, tai turime $\frac{24}{8} = 3$ susodinimo variantus. Jei už stalo sėdi 7 žmonės, tai variantų skaičius lygus $\frac{7!}{14} = 360$. Apskritai, kai sodinama n žmonių, variantų skaičius lygus $\frac{(n-1)!}{2}$. Jei du nurodytieji asmenys

turi sėdėti greta, tai variantų skaičius yra dukart didesnis už 6 žmonių susodinimo variantų skaičių (tuos žmones galima sukeisti vietomis). Vadinasi, jis lygus $5!=120$. Panašiai įsitikiname, kad tuo atveju, kai nurodytas žmogus turi sėdėti tarp dviejų nurodytųjų žmonių, variantų skaičius lygus $4!=24$.

26. Vienoje komandoje žaidžia vienas vaikinas, kitoje – du vaikinai. Juos suskirstyti į komandas galima trim būdais. Po to į pirmąją komandą reikia išrinkti 3 merginas iš 5. Tai padaryti yra $C_5^3=10$ būdų. Pagal dauginimo taisyklę gauname $3\cdot10=30$ variantų visus jaunuolius suskirstyti į dvi komandas.

27. Skirstant n skirtingų daiktų į k grupių, galimų variantų skaičius lygus k^n. Šiuo atveju turime $3^6=729$ variantus.

28. Pagal dauginimo taisyklę: $7\cdot9=63$ būdai.

29. Pirmasis pasirinkti knygas keitimui gali $C_7^2=21$ būdu, o antrasis – $C_9^2=36$ būdais. Iš viso $21\cdot36=756$ variantai.

30. Visus oratorių išdėstymo į eilę variantus suskirstykime poromis, kurias sudaro variantai, gaunami vienas iš kito, sukeitus A ir B vietomis. Vienas variantas iš kiekvienos poros tenkina iškeltąją sąlygą. Todėl turime $\frac{5!}{2}=60$ variantų.

31. Jei B kalba tuojau pat po A, tai juodu galima laikyti vienu oratoriumi. Todėl turime $4!=24$ variantus.

32. Pasirinkti vietas vyrams ir moterims galima dviem būdais. Paskui pasodinti vyrus pasirinktose vietose yra $5!$ būdų. Tiek pat ir moterų susodinimo variantų. Iš viso gauname $2\cdot(5!)^2=28\ 800$ variantų.

33. Turime 10 kartų mažiau variantų, negu praeitame uždavinyje, t. y. 2880 variantų.

34. Ištraukti 10 kortų yra iš C_{52}^{10} būdų Skaičius atvejų, kai nėra nė vieno tūzo, lygus C_{48}^{10}. Todėl yra $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}$ atvejų, kai ištraukiamas bent vienas tūzas. Tik vieną tūzą ištraukti yra $C_4^1\,C_{48}^9$ būdų, ne mažiau kaip du tūzus $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}-4C_{48}^9$ būdų, tiksliai du tūzus $C_4^2\,C_{48}^8$ būdų (du tūzus pasirinkti – C_4^2 būdų, kitas 8 kortas – C_{48}^8 būdų).

35. 3^m būdų (žr. **27** uždavinį).

36. Kiekvieną dantų rinkinį užšifruokime nulių ir vienetų seka (nulis rašomas, kai atitinkamoje vietoje nėra danties, vienetas,– kai yra). Tokių sekų skaičius lygus 2^{32}. Kadangi kiekvieną gyventoją atitinka tik viena seka, tai gyventojų skaičius nėra didesnis už 2^{32}.

37. Pirmiausia iš trijų keleivių, kuriems nesvarbu, kaip sėdėti, pasirinkime vieną ir pasodinkime jį veidu į garvežį. Tą pasirinkimą galima atlikti 3 būdais. Po to turime po $5!$ variantų susodinti keleivius ant kiekvieno suolo. Iš viso gauname $3\cdot(5!)^2=43\ 200$ variantų.

38. $A_9^4=3024$.

39. $C_{52}^5=2\ 598\ 960$.

40. Numerių su viena raide yra $32\cdot10^4$, su dviem raidėmis – $32^2\cdot10^4$, su trim raidėmis – $32^3\cdot10^4$. Pagal sumavimo taisyklę iš viso yra $33\,824\cdot10^4$ numerių.

41. Iš penkių dienų reikia pasirinkti dvi dienas, kuriomis duodami obuoliai. Iš viso $C_5^2=10$ variantų.

42. C_{m+n}^m.

43. $P(2,\ 3,\ 4)=1260$.

44. Kadangi apelsinai skirtingi, tai turime $A_8^5=6720$ variantų.

45. Kiekvienas apelsinas gali atitekti bet kuriam iš 8 sūnų. Todėl turime $8^5=32\,768$ variantus.

46. $P(3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)$; $P(3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$; $P(2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,)$.

47. $C_{30}^4=27\ 405$; $A_{30}^4=657\ 720$.

48. $P(2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1)=5040$.

49. Pirmiausia pasirenkame 6 abonentus; C_n^6 variantų. Išdėstome tuos abonentus bet kuria eile ir suskirstome poromis: pirmas – antras, trečias – ketvirtas, penktas – šeštas. Tai padaryti yra $6!$ būdų. Kadangi kiekvienos poros abonentus galima sukeisti vietomis ir, be to, nesvarbi porų eilė, tai visų galimų variantų skaičių reikia padalyti $2^3\cdot3!=48$. Iš viso gauname $\frac{n!}{48\,(n-6)!}$ variantų.

50. $\overline{C}_{10}^{12}=C_{21}^{12}$; $\overline{C}_{10}^{8}=C_{17}^{8}$; C_{10}^{8}.

51. Galima pasirinkti dvi, tris arba keturias moteris. Dvi moteris galima pasirinkti C_4^2 būdais. Po to reikia pasirinkti 4 vyrus, o tai padaryti yra C_7^4 būdų. Pagal dauginimo taisyklę gauname $C_4^2 C_7^4$ variantų. Jei pasirenkamos 3 moterys, tai gaunama $C_4^3 C_7^3$ variantų, o jei keturios, – tai $C_4^4 C_7^2$ variantų. Iš viso

$$C_4^2 C_7^4 + C_4^3 C_7^3 + C_4^4 C_7^3 = 371 \text{ variantas.}$$

52. Skaičius turi baigtis viena iš penkių kombinacijų: 12, 24, 32, 44, 52; du pirmieji skaitmenys gali būti bet kokie. Iš viso gauname $5^2 \cdot 5 = 125$ skaičius.

53. Kiekvienas iš n keleivių gali pasirinkti bet kurią iš m stočių. Todėl yra m^n pasiskirstymo variantų. Jei atsižvelgiame tik į stotyje išlipusių keleivių skaičių, tai gauname C_{m+n-1}^{m-1} variantų.

54. Jei a ir b stovi greta, tai iš jų galima sudaryti vieną elementą. Turėdami mintyje, kad a ir b galima sukeisti vietomis, gauname $2(n-1)!$ kėlinių, kuriuose a ir b stovi vienas prie kito. Todėl kėlinių, kuriuose jie nestovi greta, yra $n!-2(n-1)!$. Panašiai įsitikiname, kad yra $n!-6(n-2)!$ kėlinių, kuriuose a, b ir c nestovi greta. Kėlinių, kuriuose elementai a, b ir c yra vienas nuo kito atskirti, galima sudaryti $n!-6(n-1)!+6(n-2)!$ (pagal priskirties ir išskirties formulę).

55. Trijų teisėjų siūlomi kandidatai į nugalėtojus gali sudaryti 10^3 variantų. Trys skirtingi kandidatai sudaro $A_{10}^3 = 720$ variantų. Todėl yra 280 atvejų, kai dviejų arba trijų teisėjų nuomonės sutampa. Tie atvejai sudaro 0,28 visų galimų atvejų.

56. Kadangi kiekvienas studentas gali gauti vieną iš trijų pažymių, tai yra $3^4 = 81$ egzaminų išlaikymo variantas.

57. Kadangi vėrinys nesikeičia, cikliškai stumdant karolius ir apverčiant vėrinį, tai galima sudaryti $\frac{7!}{14} = 360$ skirtingų vėrinių.

58. Vienas vėrinys skiriasi nuo kito skaičiumi mažųjų karoliukų, įterptų tarp didžiųjų karolių. Todėl galima sudaryti tris skirtingus vėrinius.

59. Lietuvių abėcėlėje yra 33 raidės, bet raidėmis ę ir ų vardai negali prasidėti. Todėl gali būti ne daugiau kaip $31^2 = 961$ skirtingų inicialų, o tai mažiau už 2000.

60. $A_{10}^7 = 604\ 800$; $C_{10}^3 = 120$. Jei dvi nurodytosios merginos turi būti pakviestos šokti, tai yra A_7^2 būdų parinkti joms partnerius; 5 likusieji jaunuoliai renkasi partneres iš 8 likusių merginų, o tai padaryti yra A_8^5 būdų; todėl iš viso susidaro $A_7^2 A_8^5 = 282\ 240$ variantų. Pagaliau, kai dvi nurodytosios merginos jau pakviestos šokti, tai pakviesti dar penkias merginas yra C_8^5 būdų.

61. Pasirinkti karininką yra C_3^1 būdų, seržantus – C_6^2 būdų, eilinius C_{60}^{20} būdų. Pagal dauginimo taisyklę susidaro $C_3^1 C_6^2 C_{60}^{20}$ pasirinkimo variantų. Jei būryje turi būti kuopos vadas ir vyriausias seržantas, tai gauname $C_5^1 C_{60}^{20}$ pasirinkimo variantų.

62. Pasirinkti keturias merginas yra C_{12}^4 būdų. Po to pasirenkame jaunuolius: A_{15}^4 kombinacijų (čia jau svarbi eilė!). Iš viso $C_{12}^4 A_{15}^4 = 16\ 216\ 200$ variantų.

63. Kiekviena višta gali priklausyti arba nepriklausyti pasirinktajai paukščių grupei. Todėl turime 2^3 vištų pasirinkimo variantų. Kadangi sąlygoje reikalaujama imti bent vieną vištą, tai vištas pasirinkti galime 7 būdais. Panašiai įsitikiname, kad pasirinkti antis galima $2^4 - 1 = 15$ būdų, o žąsis – $2^2 - 1 = 3$ būdais. Iš viso $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$ variantų.

64. Tas skaičius lygus $P(m, n, p) = \frac{(m+n+p)!}{m!\, n!\, p!}$.

65. Yra $m!$ knygų juodais apdarais sustatymo variantų ir $n!$ knygų raudonais apdarais sustatymo variantų. Pagal dauginimo taisyklę – iš viso $m!n!$ variantų. Jei knygos juodais apdarais stovi viena prie kitos, tai reikia joms parinkti vietą tarp knygų raudonais apdarais. Tai padaryti yra $n+1$ būdų. Iš viso gauname $m!n!(n+1) = m!(n+1)!$ variantų.

66. Kiekvienas iš tų 15 žmonių gali priklausyti arba nepriklausyti grupei. Kadangi grupė negali būti tuščia, tai galima sudaryti $2^{15} - 1 = 32\ 767$ skirtingų grupių. Kai žmonių skaičius lygus n, galimų variantų skaičius lygus $2^n - 1$.

67. Skaičius p_k daliklyje gali turėti tokius rodiklius: 0, 1, ..., α_k; iš viso $\alpha_k + 1$ variantų. Pagal dauginimo taisyklę sužinome, kad daliklių skaičius lygus $(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$. Daliklių sumai apskaičiuoti išnagrinėkime sandaugą

$$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \ldots (1 + p_n + \ldots + p_n^{\alpha_n}).$$

Sudauginę parašytuosius daugianarius, gausime sumą, kurios dėmenys yra skaičiaus q dalikliai. Be to, kiekvienas daliklis bus parašytas tik vieną kartą. Pagal geometrinės progresijos sumos formulę ta suma lygi

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}.$$

68. Iš pradžių į kiekvieną maišelį įdedame po pusrublį. Likusius 7 pusrublius bet kaip sudėstome į 5 maišelius. Tai padaryti yra $C_{11}^4=330$ būdų (žr. p. 161).

69. Prie 20 knygų pridedame 4 vienodus skiriamuosius daiktus ir sudarome visus turimųjų objektų kėlinius. Jų skaičius lygus $\frac{24!}{4!}$. Kiekvieną kėlinį atitinka vienas knygų sustatymo variantas.

70. Kaip ir praeitame uždavinyje, įsitikiname, kad variantų skaičius lygus $\frac{8!}{3!}=$ $=6720$.

71. Kadangi atsižvelgiama tik į paduotų už kiekvieną pasiūlymą balsų skaičių, tai reikia 30 vienodų „daiktų" sudėti į 5 „dėžes". Tuo tikslu pridedame 4 vienodus skiriamuosius daiktus ir sudarome visus turimųjų objektų kėlinius. Jų skaičius lygus $P(30, 4)=46\ 376$. Kiekvieną kėlinį atitinka vienas balsų pasiskirstymas.

72. 12 knygų įrišti į 3 spalvų viršelius yra 3^{12} būdų. Iš jų $3\cdot 2^{12}$ atvejais knygų viršeliai bus ne daugiau kaip dviejų spalvų, o 3 atvejais visų knygų viršeliai bus vienos spalvos. Pagal priskirties ir išskirties formulę sužinome, kad $3^{12}-3\cdot 2^{12}+3=519\ 156$ atvejais knygos bus įrištos visų trijų spalvų viršeliais.

73. Prie 32 raidžių pridėsime 5 vienodas „pertvaras" ir sudarysime visus tų objektų kėlinius, kurių pradžioje ir gale nėra pertvarų ir kuriuose pertvaros nestovi greta. Iš raidžių gauname 32! kėlinių; pertvaroms turime 31 vietą, todėl jas pastatyti yra C_{31}^5 variantų. Kadangi žodžių eilė nesvarbi, gauname $\frac{32!\,C_{31}^5}{6!}$ žodžių sudarymo variantų.

74. Pasirinkti 12 žmonių iš 17 yra C_{17}^{12} būdų. Du nurodytieji žmonės pateks į pasirenkamąją grupę C_{15}^{10} atvejais. Todėl lieka $C_{17}^{12}-C_{15}^{10}$ galimų grupių.

75. Iš brangakmenių galima sudaryti $P(5, 6, 7)$ kėlinių. Kilnojant brangakmenius cikliškai ir simetriškai, apyrankė nesikeičia. Gauname $\frac{P(5,\ 6,\ 7)}{36}=\frac{18!}{36\cdot 5!\,6!\,7!}$ variantų.

76. Jei pasirenkami vienodi brangakmeniai, tai 3 būdai; jei pasirenkami dviejų rūšių brangakmeniai, tai $2C_3^1=6$ būdai; jei visi 3 brangakmeniai skirtingi, tai 1 būdas. Iš viso 10 variantų.

77. Padėti puodukus] yra A_4^3 būdai, lėkšteles — A_5^3 būdų, arbatinius šaukštelius — A_6^3 būdų. Pagal dauginimo taisyklę iš viso $A_4^3 A_5^3 A_6^3=172\ 800$ variantų.

78. Jei vyras pasikvies į svečius k moterų, tai jo pakviestųjų vyrų skaičius bus lygus $6-k$. Tada žmona turi pakviesti $6-k$ moterų ir k vyrų. Pagal dauginimo ir sumavimo taisykles sužinome, kad svečius pasirinkti yra $\sum_{k=0}^{5}(C_5^k)^2\,(C_7^{6-k})^2=267\ 148$ būdai.

79. Prie kairiojo borto gali sėdėti 0, 1, 2, 3 arba 4 žmonės iš tų, kuriems nesvarbu, prie kurio borto sėdėti. Jei iš jų pasirinkta k žmonių, tai reikia dar pasirinkti $4-k$ žmonių iš 10 kandidatų, kuriems geriau sėdėti prie kairiojo borto. Po to lieka $12+(9-k)$ kandidatų, iš kurių pasirenkame 4 irkluotojus prie dešiniojo borto. Iš viso turime $C_9^k C_{10}^{4-k} C_{21-k}^4$ pasirinkimo variantų. Sumuodami k atžvilgiu, gauname atsakymą

$$\sum_{k=0}^{4} C_9^k C_{10}^{4-k} C_{21-k}^4=\frac{9!\,10!}{4!}\sum_{k=0}^{4}\frac{(21-k)!}{k!\,(9-k)!\,(4-k)!\,(6+k)!\,(17-k)!}.$$

80. Skaičių 9 išreikšti trijų skirtingų dėmenų suma galima trim būdais: $9=1+$ $+2+6=1+3+5=2+3+4$. Suma bus mažesnė už 9 keturiais atvejais: $1+2+3=6$,

$1+2+4=7$, $1+2+5=1+3+4=8$. Kadangi 3 žetonus išimti yra C_{10}^3 būdų, tai bus $C_{10}^3-4=116$ atvejų su suma, ne mažesne už 9.

81. Iš pradžių pasirenkame po vieną kiekvienos rūšies kortą. Tai padaryti turime 13^4 variantų. Po to renkamės dar dvi kortas. Jeigu jos skirtingų rūšių, pasirinkti galima $C_4^2 \cdot 12^2=864$ būdais. Kombinuodami tuos variantus su įvairiais pirmųjų 4 kortų pasirinkimo variantais ir turėdami mintyje, kad dviejų vienos rūšies kortų pasirinkimo eilė nesvarbi, gauname $216 \cdot 13^4$ variantų. Jei dvi naujosios kortos yra vienos rūšies, tai turime $4 \cdot C_{12}^2=264$ pasirinkimo variantus. Tais pačiais samprotavimais įsitikiname, kad šiuo atveju yra $88 \cdot 13^4$ visų kortų pasirinkimo variantų. Iš viso gauname $304 \cdot 13^4$ variantų.

82. Pirmąją dieną dainininkus galima pasirinkti $C_{10}^6=210$ būdų, antrąją – $C_{10}^6-1=209$ būdais, o trečiąją – $C_{10}^6-2=208$ būdais. Iš viso $210 \cdot 209 \cdot 208=9\ 129\ 120$ variantų.

83. Kadangi $C_6^3=20$, tai kiekvienas galimas draugų trejetas bus panaudotas tik vieną kartą. Tų trejetų kėlinių skaičius lygus 20!.

84. Kiekvienas jaunuolis gali pasirinkti vieną iš 5 darboviečių, o kiekviena mergina – vieną iš 4 darboviečių. Iš viso gauname $5^3 \cdot 4^2=2000$ pasirinkimo variantų.

85. Pirmoje vietoje galima parašyti bet kurią iš 33 raidžių, o kiekvienoje tolesnėje – vieną iš 32 raidžių (išskiriama prieš tai parašytoji raidė). Iš viso gauname $33 \cdot 32^4=34\ 603\ 008$ žodžius.

86. Iš pradžių pasirenkame prizininkus, o paskui paskirstome jiems knygas. Pagal dauginimo taisyklę gauname $C_{20}^6\, P(3, 2, 1)$ variantų. Antruoju atveju iš pradžių pasirenkame, kam duoti pirmąją knygą, paskui, – kam antrąją, ir pagaliau, – kam trečiąją. Iš viso gauname $C_{20}^3 C_{20}^2 C_{20}^1$ paskirstymo variantų.

87. Kiekvieną kauliuką (p, q) atitinka kauliukas $(n-p, n-q)$. Jei $p+q=n-r$, tai $(n-p)+(n-q)=n+r$. Vadinasi, kauliukų su akių suma $n-r$ skaičius lygus kauliukų su akių suma $n+r$ skaičiui. Visų domino kauliukų skaičius lygus $\overline{C}_{n+1}^2=C_{n+2}^2$.

88. Iš uždavinio sąlygų matyti, kad vyrų ir moterų užimamos vietos kaitaliojasi. Todėl turime $2(7!)^2$ variantų.

89. Pasirenkame po vieną arklį iš kiekvienos poros AA', BB', CC' (8 variantai), tris arklius iš 10 likusiųjų arklių ($C_{10}^3=120$ variantų) ir pasirinktųjų arklių kinkymo tvarką (6! variantų). Iš viso $8 \cdot 6!\ C_{10}^3=691\ 200$ variantų.

90. Pasirinkti priebalses turime C_9^4 būdų, balses – C_7^3 būdų. Iš 7 pasirinktųjų raidžių galima sudaryti 7! kėlinių. Iš viso gauname $C_9^4 C_7^3\, 7!$ žodžių. Jei dvi priebalsės negali stovėti greta, tai raidžių eilė yra tokia: PBPBPBP. Tada turime 3!4! kėlinių ir $C_9^4 C_7^3\, 3!4!$ žodžių.

91. Pagal priskirties ir išskirties formulę darbuotojų skaičius yra lygus $6+6+7-4-3-2+1=11$. Tiktai anglų kalbą moka $6-4-2+1=1$ darbuotojas; tik prancūzų kalbą moka $7-3-2+1=3$ darbuotojai.

92. Taikydami priskirties ir išskirties formulę, sužinome, kad pyragėlius pasiėmė $92-47-38-42+28+31+26-25=25$ žmonės.

93. Vyrus suskirstyti poromis yra $\frac{10!}{(2!)^5\, 5!}$ būdų (atsižvelgiama į kėlinius porų viduje ir į pačių porų keitimą vietomis). Moterys suskirstomos $\frac{10!}{(2!)^5}$ būdais (čia jau svarbi porų eilė). Iš viso $\frac{(10!)^2}{2^{10}\, 5!}$ variantų.

94. Iš pradžių pasirenkame vyrą ir moterį, kurie plauks vienoje valtyje su anksčiau pasirinktąja pora (9^2 variantų). Po to likusius žmones skirstome į 4 grupes $\left(\frac{(8!)^2}{2^8 \cdot 4!}\right.$ variantų$\left.\right)$. Iš viso $\frac{(9!)^2}{2^8 \cdot 4!}$ variantų.

95. Jei abu nurodytieji vyrai patenka į vieną grupę (joje yra ir jų žmonos), tai visi kiti susiskirstyti grupėmis turi $\frac{(8!)^2}{2^8\, 4!}$ galimybių. Jeigu jie patenka į skirtingas gru-

pes; tai tas grupes papildyti yra $(A_8^2)^2$ būdų, o visus kitus suskirstyti į grupes $\frac{(6!)^2}{2^6 3!}$ būdų. Iš viso gauname $\frac{17 \cdot (8!)^2}{2^8 4!}$ variantų.

96. Kadangi pirmasis skaitmuo negali būti 0, tai turime $7^4-7^3=2058$ skaičius.

97. Jei skaičius, išreikštas trim pirmaisiais skaitmenimis, lygus x, tai skaičius, reiškiamas trim paskutiniais skaitmenimis, gali turėti reikšmes $0, 1, \ldots, 999-x$; iš viso $1000-x$ reikšmių. Kadangi x kinta nuo 100 iki 999, tai reikia sudėti natūrinius skaičius nuo 1 iki 900. Tų skaičių suma lygi 405 450.

98. Baltąsias šaškes sustatyti yra C_{32}^{12} būdų. Pasirinkus 12 langelių baltosioms šaškėms, lieka 20 langelių juodosioms šaškėms, kurias sustatyti turime C_{20}^{12} būdų. Iš viso $C_{32}^{12} C_{20}^{12}$ variantų.

99. Visus žodžio „Adonis" raidžių kėlinius suskirstome į klases taip, kad vienos klasės kėliniai skirtųsi vienas nuo kito tik balsių tvarka. Klasių skaičius lygus $\frac{P_6}{P_3} = 120$. Kiekvienoje klasėje yra tik vienas kėlinys, tenkinąs nurodytąją sąlygą. Todėl tokių kėlinių skaičius irgi lygus 120.

100. Jei kuriame nors kėlinyje 4 raidės „a" surašytos viena prie kitos, tai jas galima sujungti ir laikyti viena raide. Todėl tokių kėlinių skaičius lygus 5!. Lieka $P(4, 1, 1, 1, 1) - 5! = 1560$ kėlinių.

101. Jei „t" eina tuoj po raidės „o", tai tas raides galima sujungti. Todėl ieškomųjų kėlinių skaičius lygus $P(2, 1, 1, 1, 1)=360$.

102. Pirmiausia išdėstome visas žodžio „palatalizacija" raides, išskyrus raides „a"; turime $P(2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$ variantų. Paskui iš 10 vietų pasirenkame 5 vietas, kuriose parašome raidę „a". Iš viso gauname $P(2, 2, 1, 1, 1, 1, 1) \cdot C_{10}^5$ variantų.

103. Ir balses, ir priebalses kaitalioti vietomis yra $P(2, 1, 1)=12$ būdų. Jei priebalsės jau išdėstytos, tai balsėms lieka 5 vietos. Todėl pasirinkti balsių vietas galima $C_5^4 = 5$ būdais. Iš viso turime $5 \cdot 12^2 = 720$ variantų.

104. Surašome nurodytąja eile balses. Tada raidei „f" turime 5 vietas. Ją parašius, atsiranda 6 vietos raidei „z" ir pagaliau 7 vietos raidei „j". Iš viso $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ variantų.

105. Kaip ir praeitame uždavinyje, įsitikiname, kad variantų skaičius lygus $\frac{A_{10}^6}{P_3} = 25\,200$.

106. Pirmiausia fiksuojame balsių seką (2 variantai), paskui tarp tų balsių parašome 2 priebalses iš 4 turimų priebalsių ($A_4^2 = 12$ variantų). Pirmąją iš 2 likusiųjų priebalsių galima parašyti prieš balses arba po balsių. Paskutinei priebalsei jau turime 3 vietas. Iš viso gauname $2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 3 = 144$ variantus.

107. Iš 5 priebalsių pasirenkame 3 raides ir parašome jas nurodytose vietose (A_5^3 variantų). Likusias 5 raides bet kokiu būdu išdėstome 5 likusiose vietose (5! variantų). Iš viso $5! A_5^3 = 7200$ variantų.

108. Pagal dauginimo taisyklę $C_5^2 C_3^1 = 30$ variantų; $C_4^1 C_3^1 = 12$ variantų.

109. $P(3, 1, 1, 1) - 4! = 96$ variantai (žr. **100** uždavinį).

110. Pirmiausia išdėstykime priebalses (3! variantų). Trims raidėms „a" lieka 4 vietos, todėl jas galima išdėstyti 4 būdais. Iš viso 24 variantai.

111. Pasirinktųjų raidžių grupėje gali būti 0, 1 arba 2 raidės „k" (3 variantai), 0, 1, 2 arba 3 raidės „a" (4 variantai) ir t. t. Iš viso gauname $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 480$ variantų.

112. Gali būti $C_6^3 = 20$ kombinacijų, kurių visos trys raidės skirtingos, $3 \cdot 5 = 15$ kombinacijų, kurių tik dvi raidės yra skirtingos, ir 2 kombinacijos, kurių visos trys raidės yra vienodos. Iš viso 37 pasirinkimo variantai.

113. Kai atsižvelgiame į raidžių eilę, gauname $A_6^3 + 3 \cdot 3 \cdot 5 + 2 = 167$ variantus.

114. Kadangi ir balsių, ir priebalsių eilė nurodyta, tai reikia iš 7 vietų parinkti 3 vietas balsėms. Tai padaryti galima $C_7^3 = 35$ būdais.

115. Sudarinėjant kėlinius iš žodžio „kavinukas" raidžių, pirmoji ir paskutinė raidės turi būti priebalsės. Iš priebalsių galima sudaryti $P(2, 1, 1, 1)$ kėlinių, o iš balsių $P(2, 1, 1)$ kėlinių. Iš viso turime $P(2, 1, 1, 1) \cdot P(2, 1, 1) = 720$ variantų. Iš žodžio „romanas" raidžių galima sudaryti $P_4 \cdot P(2, 1) = 72$ kėlinius.

116. Iš 6 vietų reikia parinkti 3 vietas raidei „a“. Tai galima padaryti $C_6^3=26$ būdų. Jei pridedama sąlyga, kad dvi raidės „a“ nestovėtų greta, tai joms lieka tik keturios vietos; todėl turime $C_4^3=4$ variantus.

117. Iš žodžio „testas“ raidžių galima sudaryti iš viso 180 kėlinių. Tokių kėlinių, kuriuose raidės „t“ stovi greta, yra 60; tokių, kuriuose raidės „s“ stovi greta, – irgi 60; tokių, kuriuose ir „t“, ir „s“ stovi greta, yra 24. Pagal priskirties ir išskirties formulę gauname $180-60-60+24=84$ galimus kėlinius. Iš žodžio „murmur“ turime $90-30-30-30+12+12+12-6=30$ galimų kėlinių.

118. Galima sudaryti 3 kombinacijas, kuriose yra po tris skirtingas raides „m“, „u“, „r“ ir tris kombinacijas, kuriose yra po dvi skirtingas raides. Iš viso 6 kombinacijos. Iš skaičiaus 123 123 skaitmenų galima sudaryti $3P(2, 1, 1)+3P(2, 2)=54$ skirtingus keturženklius skaičius.

119. Remdamiesi priskirties ir išskirties formule, įsitikiname, kad visus skaitmenis 1, 2, 3, 4 turi $10^6-4\cdot 9^6+6\cdot 8^6-4\cdot 7^6+6^6=23\ 160$ skaičių. Vien skaitmenimis 1, 2, 3, 4 galima parašyti $4+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6=\dfrac{4^7-4}{3}=5460$ skaičių.

120. Kiekvieną skaitmenį kiekviename skyriuje galima parašyti $P_3=6$ kartus. Todėl, sudėję pirmojo skyriaus skaitmenis, gauname sumą $6(1+2+3+4)=60$, antrojo skyriaus – sumą 600 ir t. t. Iš viso gauname $60+600+6000+60\ 000=66\ 660$.

121. Šiuo atveju galima sudaryti 12 kėlinių; skaitmenis 1 ir 5 kiekviename skyriuje galima parašyti po tris kartus, o skaitmenį 2 – šešis kartus. Todėl pirmojo skyriaus skaitmenų suma lygi $3\cdot 1+3\cdot 5+6\cdot 2=30$. Visų skaičių suma lygi $30+300+3000+30\ 000=33\ 330$.

122. Panašiai įsitikiname, kad suma lygi 11 110.

123. Suma lygi 16 665.

124. Jei nepaisytume sąlygos, kad pirmasis skaitmuo negali būti 0, tai gautume sumą 2 666 640. Skaičių, kurių pirmasis skaitmuo yra 0, suma lygi 66 660. Todėl penkiaženklių skaičių, kurių pirmasis skaitmuo nėra 0, suma lygi 2 599 980.

125. Kadangi skaitmenimis 8 ir 9 galima parašyti 2^k k-ženklių skaičių, tai iš viso yra $\sum_{k=1}^{6} 2^k=126$ nurodytojo tipo skaičiai.

126. Analogiškai gauname $\sum_{k=1}^{6} 3^k=1092$.

127. Kadangi pirmasis skaitmuo negali būti 0, tai galima parašyti $2\sum_{k=0}^{5} 3^k=728$ skaičius.

128. Kiekviename skyriuje tas pats skaitmuo pasikartoja $4^2=16$ kartų. Todėl pirmojo skyriaus skaitmenų suma lygi $16(1+2+3+4)=160$, antrojo skyriaus – 1600, trečiojo – 16 000. Suma lygi 17 760.

129. Pirmuoju atveju suma lygi 3 999 960. Antruoju atveju kiekviename skyriuje tas pats skaitmuo pasikartoja A_8^4 kartų, todėl pirmojo skyriaus skaitmenų suma lygi $A_8^4(1+2+\ldots+9)=75\ 600$. Visa suma lygi 839 991 600.

130. Paskutinėje vietoje gali būti arba skaitmuo 3, arba 9, o kitus skaitmenis galima perstatinėti $3!=6$ būdais. Iš viso gauname 12 nelyginių skaičių. Panašiai įsitikiname, kad galima sudaryti 12 lyginių skaičių.

131. Pasirinkti nelyginių skaitmenų vietas yra $C_6^3=20$ būdų. Kiekvienoje vietoje galima rašyti vieną iš 5 skaitmenų (arba lyginį, arba nelyginį). Iš viso gauname $20\cdot 5^6$ skaičių, bet $10\cdot 5^5$ skaičių prasideda skaitmeniu 0. Lieka $20\cdot 5^6-10\cdot 5^5=281\ 250$ skaičių.

132. $C_6^3\cdot 5^6=312\ 500$ skaičių.

133. Pirmoje vietoje galima rašyti vieną iš 9 skaitmenų, antroje, trečioje, ketvirtoje ir penktoje vietoje – vieną iš 10 skaitmenų, o paskutinėje vietoje – vieną iš 5 skaitmenų (jau žinoma, koks tas skaitmuo turi būti – lyginis ar nelyginis). Iš viso gauname $9\cdot 10^4\cdot 5=450\ 000$ skaičių. Jei imtume visus skaičius nuo 1 iki 999 999, tai gautume 499 999 skaičius.

134. Jei išbrauktume nulius, tai gautume vieną iš keturių sekų: 3; 2, 1; 1, 2; 1, 1, 1. Belieka išdėstyti nulius taip, kad pirmasis skaitmuo nebūtų 0. Prie skaitmens 3 prijungti nulius galima tik vienu būdu; prie skaitmenų 2, 1 ir 1, 2 – devyniais būdais (žiūrima, kiek nulių stovi tarp tų skaitmenų); prie skaitmenų 1, 1, 1 – $C_9^2=36$ būdais. Iš viso $1+9+9+36=55$ skaičiai. Jei imtume visus skaičius nuo 1 iki 9 999 999 999 tai reikėtų parinkti vietas skaitmenims, nelygiems nuliui. Skaitmenį 3 parašyti būtų C_{10}^1 būdų, skaitmenis 2, 1 ir 1, 2 – po C_{10}^2 būdų, o skaitmenis 1, 1, 1 – C_{10}^3 būdų. Iš viso gautume $C_{10}^1+2C_{10}^2+C_{10}^3=220$ skaičių.

135. Pirmoje vietoje gali stovėti bet kuris iš 9 skaitmenų: 1, 2, ..., 9. Antrą vietą gali užimti bet kuris iš 9 likusių skaitmenų, trečią – bet kuris iš 8 skaitmenų ir t. t. Iš viso gauname $9\cdot 9!$ skaičių.

136. Nuo 0 iki 999 imtinai yra $\left[\frac{1000}{5}\right]$ skaičių, kurie dalijasi iš 5 ($[x]$ – sveikoji skaičiaus x dalis). Iš 7 dalijasi $\left[\frac{1000}{7}\right]$ skaičių, o iš 35 – $\left[\frac{1000}{35}\right]$ skaičių. Remdamiesi priskirties ir išskirties formule, sužinome, kad

$$1000-\left[\frac{1000}{5}\right]-\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{35}\right]=686$$

skaičiai nesidalija nei iš 5, nei iš 7.

137. Panašiai įsitikiname, kad tiriamųjų skaičių yra 228.

138. Skaičių, parašomų be skaitmens 9, yra 729. Todėl skaitmuo 9 yra parašytas $1000-729=271$ skaičiuje. Tiksliai du kartus skaitmuo 9 parašytas 27 skaičiuose (099, 909, 990, 199 ir t. t.). Skaitmuo 0 parašytas viename vienaženkliame, 9 dviženkliuose ir 171 triženkliame skaičiuje; iš viso 181 skaičius. Skaitmuo 0 dukart parašytas 9 skaičiuose. Abu skaitmenys 0 ir 9 parašyti 36 skaičiuose (jei trečiasis skaitmuo nėra nei 0, nei 9, tai turime $2\cdot 2\cdot 8$ variantus, o jei jis lygus 0 arba 9, tai dar 4 variantus). Skaitmenys 8 ir 9 parašyti 54 skaičiuose. Tokių n-ženklių skaičių, kuriuose nėra greta stovinčių vienodų skaitmenų, yra 9^n, kai $n>1$, ir 10, kai $n=1$. Todėl nuo 0 iki 999 999 imtinai tokių skaičių yra $10+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6=597\ 871$.

139. Keturženklį skaičių galima parašyti arba keturiais skirtingais skaitmenimis (1, 2, 3, 5), arba dviem vienodais ir dviem skirtingais skaitmenimis (1, 1, 2, 3; 1, 1, 2, 5; 1, 1, 3, 5; 1, 2, 3, 3; 1, 3, 3, 5; 2, 3, 3, 5), arba dviem poromis vienodų skaitmenų (1, 1, 3, 3). Todėl iš viso tokių skaičių yra

$$P_4+6P(2,\ 1,\ 1)+P(2,\ 2)=24+6\cdot 12+6=102.$$

140. Panašiai, kaip ir praeitame uždavinyje, gauname atsakymą:

$$2P(2,\ 1,\ 1,\ 1)+3P(3,\ 1,\ 1)+2P(2,\ 2,\ 1)+3P(4,\ 1)=255.$$

141. Šešiaženkliame skaičiuje gali būti viena, dvi arba trys poros vienodų skaitmenų. Vieną porą galima pasirinkti $C_5^1=5$ būdais. Iš 4 skirtingų ir 2 vienodų skaitmenų galima sudaryti $P(2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)=\frac{6!}{2!}=360$ kėlinių. Iš jų $5!=120$ kėlinių turi greta stovinčius vienodus skaitmenis. Vadinasi, šiuo atveju gauname $5(360-120)=1200$ šešiaženklių skaičių. Dvi vienodų skaitmenų poras galima pasirinkti $C_5^2=10$ būdų, o paskui $C_3^2=3$ būdais galima pasirinkti dar du skaitmenis. Iš pasirinktųjų skaitmenų galima sudaryti $P(2,2,1,1)=180$ kėlinių; iš jų 120 kėlinių turi bent vieną greta stovinčių vienodų skaitmenų porą, o $4!=24$ kėliniai – dvi tokias poras. Pagal priskirties ir išskirties formulę sužinome, kad šiuo atveju yra $10\cdot 3(180-1120+24)=2520$ tinkamų skaičių. Panašiai įsitikiname, kad tris vienodų skaitmenų poras turi

$$C_5^3\left(\frac{6!}{(2!)^3}-3\cdot\frac{5!}{(2!)^2}+3\cdot\frac{4!}{2!}-3!\right)=300$$

mums tinkamų skaičių. Iš viso gauname 4020 skaičių.

142. Iš pateiktųjų skaitmenų galima sudaryti iš viso

$$3\cdot\frac{5!}{2!}+C_3^2C_2^1\cdot\frac{5!}{(2!)^2}+C_3^1\cdot\frac{5!}{3!}+C_2^1\cdot\frac{5!}{3!\,2!}=440$$

penkiaženklių skaičių. Toje grupėje yra $3P_3+2\frac{P_3}{2!}=24$ skaičiai, kuriuose skaitmuo 3 parašytas tris kartus iš eilės. Gauname 416 pageidaujamų skaičių.

143. Iš turimųjų skaitmenų galima sudaryti $P(2, 2, 2, 2)$ kėlinių. Kėlinių, kuriuose kokia nors vienodų skaitmenų pora neišskirta, yra $P(2, 2, 2, 1)$; kėlinių, kuriuose dvi poros vienodų skaitmenų neišskirtos, yra $P(2, 2, 1, 1)$; kėlinių, kuriuose trys vienodų skaitmenų poros neišskirtos, yra $P(2, 1, 1, 1)$; kėlinių, kuriuose 4 vienodų skaitmenų poros neišskirtos, yra $P(1, 1, 1, 1)$. Pagal priskirties ir išskirties formulę sužinome, kad galima sudaryti

$$P(2, 2, 2, 2)-4P(2, 2, 2, 1)+6P(2, 2, 1, 1)-$$
$$-4P(2, 1, 1, 1)+P(1, 1, 1, 1)=864$$

kėlinius, kuriuose visos vienodų skaitmenų poros yra išskirtos.

144. Panašiai įsitikiname, kad tiriamųjų kėlinių skaičius lygus

$$\frac{8!}{(2!)^3}-3\cdot\frac{7!}{(2!)^2}+3\cdot\frac{6!}{2!}-5!=2220.$$

145. Visiškai panašiai gauname

$$\frac{10!}{(3!)^2}-2\cdot\frac{8!}{3!}+6!=88\,080.$$

146. Analogiškai gauname atsakymą 20 040.

147. Jei vienas skaičius pasirinktas, tai antrajam pasirinkti turime 10 būdų (jau žinome, koks jis turi būti – lyginis ar nelyginis). Žinodami, kad tuos skaičius galima sukeisti vietomis, gauname $\frac{20\cdot 10}{2}=100$ variantų.

148. Arba visi trys pasirenkamieji skaičiai turi būti lyginiai, arba vienas – lyginis, o du – nelyginiai. Todėl turime $C_{15}^3+C_{15}^1C_{15}^2=2030$ galimų variantų.

149. Kelyje yra 11 vietų, kuriose iš dviejų galimų krypčių reikia pasirinkti vieną. Todėl kelių skaičius lygus $2^{11}=2048$.

150. Kadangi kryptis pradiniame taške jau pasirinkta, tai lieka $2^{10}=1024$ variantai.

151. Panašiai įsitikiname, kad variantų skaičius lygus $3^5=243$.

152. Jei paimta p monetų po 10 kap., tai dar galima pasirinkti $0, 1, \ldots, 20-p$ penkiolikos kapeikų vertės monetų; turime $21-p$ galimų variantų. Kadangi p kinta nuo 0 iki 20, tai iš viso turime $1+2+3+\ldots+21=231$ pasirinkimo būdą.

153. Monetų skirtingų kombinacijų skaičius lygus $C_{13}^5=1287$. Todėl gali būti 1286 neteisingi atsakymai.

154. Iš viso yra 90 000 penkiaženklių skaičių. Visus lyginius skaitmenis turi $4\cdot 5^4=$ $=2500$ penkiaženklių skaičių, o visus nelyginius – $5^5=3125$ skaičiai. Skaitmenų, mažesnių už 6, nėra $4^5=1024$ atvejais, o skaitmenų, didesnių už 3, – $3\cdot 4^4=768$ atvejais. Visus skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5 turi $5!=120$ skaičių; visus skaitmenis 0, 2, 4, 6, 8 turi $4\cdot 4!=$ $=96$ skaičiai.

155. Iš uždavinio sąlygos matyti, kad skirtingais metimais gaunama ta pati suma tik tada, kai vieno metimo baigtis gaunama iš antrojo baigties, sukeičiant kauliukus. Todėl skirtingų sumų skaičius lygus $C_6^2+6=21$.

156. Visiškai panašiai gauname atsakymą $C_6^3+2C_6^2+6=56$.

157. Vienodas akių skaičius bus 6 atvejais. Du skirtingi skaičiai gali atsiverst trim būdais: ant vieno kaulelio – pirmasis skaičius, ant penkių – antrasis; ant dviejų – pirmasis, ant keturių – antrasis; ant trijų – pirmasis, ant trijų – antrasis. Pirmuoju atveju pasirinkti skaičius yra A_6^2 būdų; be to, ant bet kurio kaulelio gali būti pirmasis skaičius. Gauname $6A_6^2=180$ variantų. Panašiai įsitikiname, kad 2+4 tipo variantų skaičius lygus $A_6^2P(2, 4)=450$, o 3+3 tipo variantų skaičius $C_6^2P(3, 3)=300$. Vadinasi, yra $180+450+300+=930$ atvejų, kai atsiverčia tik du skirtingi skaičiai.

Nagrinėdami trijų skaičių pasirodymą, pirmiausia surandame visus skaičiaus 6 skirstinius trim dėmenimis: $6=1+1+4=1+2+3=2+2+2$. Atsižvelgdami į tai, gauname

$$\frac{1}{2!}A_6^3P(1,\ 1,\ 4)=1800,$$

$$A_6^3P(1,\ 2,\ 3)=7200,$$

$$\frac{1}{3!}A_6^3P(2,\ 2,\ 2)=1800,$$

o iš viso 10 800 atvejų, kai atsiverčia lygiai trys akių tipai.

Keturiais dėmenimis skaičius 6 suskirstomas šitaip: $6=1+1+1+3=1+1+2+2$. Iš tų variantų gauname $\frac{1}{3!}A_6^4\ P(1,1,1,3)=7200$ ir $\frac{1}{(2!)^2}A_6^4\ P(1,1,2,2)=16\,200$, o iš viso 23 400 atvejų, kai atsiverčia keturi akių tipai.

Penkių rūšių skaičius gauti yra $\frac{1}{4!}A_6^5\ P(1,1,1,1,2)=10\,800$ variantų, o 6 rūšių $-6!=$ $=720$ variantų. Pastebėsime, kad $6+930+10\,800+23\,400+10\,800+720=6^6$.

158. Išmestuosius kaulelius galima suskirstyti į keletą grupių, sudarytų iš kaulelių su vienodais atsivertusiais skaičiais. Todėl reikia sužinoti, kiek yra būdų suskirstyti n kaulelių į 6 grupes. Tų būdų skaičius lygus C_{n+5}^5 (žr. p. 161).

159. Kadangi $1\,000\,000=2^6\cdot5^6$, tai bet kuris milijono skaidinys trimis dauginamaisiais yra tokio pavidalo:

$$1\,000\,000=(2^{\alpha_1}\cdot5^{\beta_1})\,(2^{\alpha_2}\cdot5^{\beta_2})\,(2^{\alpha_3}\cdot5^{\beta_3}).$$

Čia α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 – sveiki neneigiami skaičiai, tenkiną lygtis $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+$ $+\beta_2+\beta_3=6$. Kadangi skaičių 6 į tris sveikus neneigiamus dėmenis galima suskirstyti $C_8^2=28$ būdais, tai, atsižvelgus į daugiklių eilę, skaidinių skaičius lygus $28^2=784$.

160. Praeitame uždavinyje aptartuosius skaidinius galima suskirstyti į tris klases: arba visi trys dauginamieji sutampa, arba du dauginamieji sutampa, o trečiasis skiriasi nuo jų, arba visi trys dauginamieji yra skirtingi. Pirmajai klasei priklauso vienas skaidinys $1\,000\,000=100\cdot100\cdot100$. Ištirkime, kiek skaidinių priklauso antrajai klasei. Jei du sutampantys dauginamieji yra $2^\alpha\cdot5^\beta$, tai $2\alpha+\alpha_3=2\beta+\beta_3=6$. Lygtis $2x+y=6$ turi 4 sveikus neneigiamus sprendinius: $x=0$, $y=6$; $x=1$, $y=4$; $x=2$, $y=2$; $x=3$, $y=$ $=0$. Kadangi kiekvieną α galima kombinuoti su bet kuriuo β, tai gauname 16 dauginamojo $2^\alpha\cdot5^\beta$ variantų. Vieno varianto, būtent, $2^2\cdot5^2$, reikia atsisakyti, nes jį atitinkąs skaidinys priklauso pirmajai klasei. Lieka 15 variantų. Iš kiekvieno varianto gauname tris skaidinius, nes trečiasis dauginamasis gali būti parašytas trijose vietose. Vadinasi, antrajai klasei priklauso 45 skaidiniai. Jei į dauginamųjų eilę neatsižvelgiame, tai gauname 15 skaidinių. Pagaliau trečios klasės skaidinių skaičius lygus $784-1-45=738$. Juos galima suskirstyti į grupes, kiekvienai grupei priskiriant skaidinius, kurie vienas nuo kito skiriasi tik dauginamųjų eile: kiekvienoje klasėje yra po 6 skaidinius. Todėl, neatsižvelgiant į dėmenų eilę, turime $1+15+123=139$ skaidinius.

161. Kiekviena moneta gali patekti į vieną iš dviejų kišenių. Todėl turime 2^9 variantų.

162. Visus daiktus kokiu nors būdu sustatysime į eilę ir pirmajam žmogui atiduosime n pirmųjų daiktų, antrajam – n tolesnių daiktų, o paskutiniajam – n likusių daiktų. Kadangi daiktų išdėstymas grupėse neturi reikšmės, tai gauname $C_{3n}^nC_{2n}^n=$ $=\frac{(3n)!}{(n!)^3}$ paskirstymo variantų.

163. Visiškai panašiai, kaip ir praeitame uždavinyje, įsitikiname, kad skirstinių skaičius lygus $\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$.

164. Analogiškai gauname atsakymą $\frac{(nk)!}{(k!)^n\,n!}$.

165. $\frac{30!}{(10!)^3\cdot3!}$, $\frac{30!}{(3!)^{10}\cdot10!}$.

166. 4 tūzus suskirstyti į dvi lygias dalis galima $\frac{4!}{(2!)^3}=3$ būdais, o likusias 32 kortas $\frac{32!}{(16!)^2\cdot 2!}$ būdais. Kadangi tuos skirstinius galima dviem būdais kombinuoti vieną su kitu, tai gauname $\frac{3\cdot 32!}{(16!)^2}$ paskirstymo variantų.

167. Variantų skaičius lygus $\frac{10!}{2^5\cdot 5!}=945$.

168. 945.

169. $\frac{9!}{(3!)^4}=280$.

170. Jei trys žmonės dalijasi 6 obuolius, tai gali būti C_8^2 dalybų variantų. Kiekvienas likusių vaisių gali tekti bet kuriam iš tų žmonių, todėl juos pasidalyti yra 3^6 būdų. Iš viso gauname $3^6 C_8^2=20\ 412$ dalybų variantų.

171. Pirmiausia paskirstysime obuolius. Kadangi kiekvienas gauna ne daugiau kaip 4 obuolius, tai, neatsižvelgiant į eilę, obuolius galima paskirstyti vienu iš šių būdų: $6=4+2+0=4+1+1=3+3+0=3+2+1=2+2+2$. Jei obuoliai padalyti pagal schemą $4+2+0$, tai iš 6 vaisių reikia parinkti 2 vaisius antrajam, o trečiajam atiduoti likusius. Tai padaryti yra C_6^2 būdų. Atsižvelgdami į tai, kad žmones galima keisti vietomis, gauname $3!\,C_6^2$ paskirstymo variantų. Kai daliname pagal schemą $4+1+1$, iš 6 vaisių reikia parinkti 3 vaisius antrajam (C_6^3 variantų). Kadangi du žmonės turi po lygiai obuolių, tai žmonių kėlinių skaičius lygus $P(2, 1)=3$. Laikantis schemos $3+3+0$, iš 6 vaisių reikia duoti vieną vaisių pirmajam, o iš 5 likusių vaisių — vieną vaisių antrajam. Šiuo atveju iš žmonių irgi sudaromi 3 kėliniai. Panašiai nagrinėjamos ir dvi paskutinės schemos. Iš viso susidaro

$$6C_6^2+3C_6^3+3C_6^1C_5^1+6C_6^1C_5^2+C_6^2C_4^2=690$$

paskirstymo variantų.

172. Kadangi $9=6+3+0=6+2+1=5+4+0=5+3+1=5+2+2=4+4+1=$ $=4+3+2=3+3+3$, tai, kaip ir praeitame uždavinyje, gauname

$$6(C_9^3+C_9^4+C_9^1C_8^2+C_9^1C_8^3+C_9^2C_7^3)+3(C_9^1C_8^4+C_9^2C_7^2)+C_9^3C_6^3=19\ 068$$

paskirstymo variantų.

173. Kortų komplektą išdalyti trylikai lošėjų yra $\frac{52!}{(4!)^{13}}$ būdų (žr. **162** uždavinį). Jei kiekvienas privalo gauti po vieną visų rūšių kortą, tai iš 13 kiekvienos rūšies kortų sudarome kėlinius. Kadangi vienos rūšies kortų kėliniai nepriklauso nuo kitos rūšies kortų kėlinių, tai pagal dauginimo taisyklę gauname $(13!)^4$ pasiskirstymo variantų. Trečiuoju atveju vienas lošėjas gali pasirinkti po vieną kiekvienos rūšies kortą (13^4 variantų). Po to 12 likusiųjų vienos rūšies kortų suskirstyti į tris grupes yra $\frac{12!}{(4!)^3 3!}$ būdų, o visas kortas taip suskirstyti — $\frac{(12!)^4}{(4!)^{12}(3!)^4}$ būdų. Gautąsias grupes išdalyti dvylikai žaidėjų yra 12! būdų. Atsižvelgę dar į tai, kad žaidėją, gaunantį po vieną kiekvienos rūšies kortą, galima pasirinkti 13 būdų, trečiuoju atveju gauname tokį atsakymą: $\frac{(13!)^5}{(4!)^{12}(3!)^4}$.

174. Traukiant 4 kortas iš pilno komplekto, gali būti C_{52}^4 skirtingų baigčių. Po 3 rūšis bus $A_4^2(C_{13}^1)^2C_{13}^2=158\ 184$ atvejais: pirma pasirenkame atmetamąją ir pasikartojančiąją rūšį (A_4^2 variantai), paskui renkamės dvi pasikartojančiosios rūšies kortas (C_{13}^2 variantų) ir po vieną kitų dviejų rūšių kortą $(C_{13}^1)^2$ variantų. Dviejų rūšių kortas pasirinkti yra $C_4^2(C_{13}^2)^2+A_4^2C_{13}^3C_{13}^1=81\ 120$ būdų. Taip atsitinka dviem atvejais: arba kai turime po dvi dviejų rūšių kortas, arba kai viena korta yra vienos rūšies, o trys — kitos. Pirmuoju atveju reikia pasirinkti dvi rūšis ir po dvi tų rūšių kortas, antruoju — pirmąją ir antrąją rūšis (čia jau turi reikšmę rūšių eilė), o paskui — tris pirmosios rūšies kortas ir vieną antrosios rūšies kortą.

175. Kiekvienos rūšies kortas suskirstysime pagal schemą 3+3+3+4. Tokių skirstinių skaičius lygus $\frac{13!}{4!\,(3!)^4}$. Grupes, kuriose yra po 4 kortas, galima išdalyti lošėjams 4! būdais. Tris vienos rūšies kortų grupes, turinčias po tris kortas, išdalyti yra 3! būdų. Iš viso gauname $(3!)^4\,4!$ grupių paskirstymo variantų. Todėl visų kortų padalijimo variantų skaičius lygus

$$\left(\frac{13!}{4!\,(3!)^4}\right)^4 4!\,(3!)^4=\frac{(13!)^4}{(4!)^3\,(3!)^{12}}.$$

176. Dalyvaujančiuosius dalybose išdėstome kokia nors eile. Paskui visais galimais būdais dėstome 18 daiktų į eilę ir skirstome į 4 grupes po 4 daiktus ir vieną grupę iš 2 daiktų. Paskutiniąją atiduodame vienam iš 5 dalyvaujančių dalybose, o kitas grupes išdalijame likusiems dalyviams (pirmąją grupę – pirmajam, antrąją – antrajam ir t. t.). Kadangi elementų eilė grupėje neturi reikšmės, tai gauname $\frac{5\cdot 18!}{(4!)^4\,2!}$ paskirstymo variantų. Antruoju atveju panašiai gauname $\frac{18!\,C_5^2}{(4!)^3\,(3!)^2}$ variantų.

177. Iš kiekvienos daiktų poros į ėminį gali patekti arba du daiktai, arba vienas daiktas, arba nė vieno daikto. Todėl ėminių skaičius lygus $3^{14}=4\ 728\ 969$.

178. Keturis juoduosius rutulius sudėti į 6 maišelius yra C_9^5 būdų. Dėstydami baltuosius ir mėlynuosius rutulius, turime po tiek pat variantų. Pagal dauginimo taisyklę gauname $(C_9^5)^3=2\ 000\ 376$ variantus.

179. Tuo pačiu metodu gauname atsakymą $C_6^3\,C_{13}^3=5720$.

180. Kiekvieną skaičiaus n skirstinį dėmenimis pavaizduokime taškų diagrama. Jei prie tos diagramos pridėtume stulpelį, sudarytą iš n taškų, tai gautume diagramą, vaizduojančią skaičiaus $2n$ skirstinį į n dėmenų.

181. Pasirinkime tris bet kokius natūrinius skaičius nuo 1 iki $n-2$ ir prie didžiausiojo pridėkime 2, o prie antrojo pagal didumą – skaičių 1. Gausime tris skaičius, atskirtus vienas nuo kito bent vienu natūriniu skaičiumi. Jie ir bus pasirenkamųjų daiktų numeriai. Vadinasi, pasirinkimui turime C_{n-2}^3 variantų.

182. $P(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)=\frac{16!}{2^6}$ variantų.

183. Jei laisvuosius langelius užimtume vienodomis šaškėmis, tai sudarytume kėlinį iš 48 šaškių ir visų uždavinyje nurodytų figūrų. Tokių kėlinių skaičius lygus $P(48,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)=\frac{64!}{2^6\,48!}$.

184. Analogiškai gauname atsakymą $P(32,\ 8,\ 8,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$.

185. Sakykime, kad baltosios šaškės užima p langelių, o juodosios – q langelių. 15 baltųjų šaškių sustatyti į p langelių, kad visi langeliai būtų užimti, yra C_{14}^{p-1} būdų, o 15 juodųjų šaškių į q langelių – C_{14}^{q-1} būdų. Pasirinkti p langelių baltosioms šaškėms ir q langelių juodosioms yra $P(p,\ q,\ 24-p-q)$ būdų. Todėl visų galimų variantų skaičius lygus

$$\sum_{p,\ q} P(p,\ q,\ 24-p-q)\,C_{14}^{p-1}\,C_{14}^{q-1};$$

sumuojama pagal visus p ir q, tenkinančius nelygybes

$$1\leqslant p\leqslant 15,\quad 1\leqslant q\leqslant 15,\quad p+q\leqslant 24.$$

186. Iš langelių, kurie sutampa vienas su kitu, sukant lentą 90° kampu, sudarysime grupes. Iš uždavinio sąlygos matyti, kad šaškės turi užpildyti 5 tokias grupes. Kadangi iš viso tokių grupių yra 16, tai turime $C_{16}^5=4368$ šaškių išdėstymo variantų.

187. Sprendžiama panašiai, kaip ir ankstesnis uždavinys. Turime C_{32}^{10} galimų variantų.

188. Langelių sumažėjo perpus, turime C_{16}^{10} variantų.

189. Vienoje lentos pusėje yra 16 juodųjų langelių. Juose reikia pastatyti 6 baltas ir 6 juodas šaškes. Tai padaryti yra $P(6,\ 6,\ 4)=\frac{16!}{6!\,6!\,4!}$ būdų.

190. Vienoje lentos pusėje iš 16 langelių pasirenkame 12 langelių ir juose sustatome bet kokias šaškes, o kitoje lentos pusėje simetriškus langelius užimame priešingos spalvos šaškėmis. Langelių pasirinkimui turime C_{16}^{12} variantų, šaškių, užimančių tuos 12 langelių, spalvos pasirinkimui turime 2^{12} variantų. Iš viso gauname $2^{12}C_{16}^{12}=$ $=7\ 454\ 720$ variantų.

191. Šaškių padėtis apsprendžiama, pasirenkant 5 langelius baltosioms šaškėms iš 7 pirmosios horizontalės langelių. Todėl turime $C_7^5=21$ variantą.

192. Šaškių dėstinius suskirstome į dvi klases, atsižvelgdami į tai, ar kampiniai langeliai užimti, ar ne. Jei kampiniai langeliai užimti, tai pirmojoje vertikalėje ir horizontalėje lieka 12 nekampinių langelių, kuriuose stovi 8 šaškės. Jas galima sustatyti $C_{12}^8=495$ būdais. Jei kampiniai langeliai laisvi, tai pirmojoje vertikalėje ir horizontalėje yra 12 nekampinių langelių, kuriuose stovi 10 šaškių. Jas galima sustatyti $C_{12}^{10}=66$ būdais. Visų išdėstymo variantų skaičius lygus 561.

193. 7 baltuosius rutulius sudėti į 9 biliardo kišenes yra C_{15}^8 būdų, o 2 juoduosius rutulius – C_{10}^8 būdų. Iš viso turime $C_{15}^8 \cdot C_{10}^8=289\ 575$ variantus.

194. Panašiai gauname $C_{15}^8\,(C_9^8)^2=521\ 235$ variantus.

195. Iš pradžių duodame 9 knygas asmeniui C. Jas pasirinkti yra C_{27}^9 būdų. 18 likusiųjų knygų padalijama A ir B (2^{18} variantų). Iš viso turime $2^{18}C_{27}^9$ paskirstymo variantų.

196. 8 žmonės gali pasiskirstyti keturiuose aukštuose 4^8 variantais. Gali būti 3^8 atvejų, kai nė vienas žmogus neišlips nurodytame aukšte, 2^8 atvejų, kai nė vienas žmogus neišlips dviejuose nurodytuose aukštuose, ir vienas atvejis, kai nė vienas žmogus neišlips trijuose nurodytuose aukštuose. Atsakymą gauname pagal priskirties ir išskirties formulę: $4^8-4\cdot 3^8+6\cdot 2^8-4=40\ 824$.

197. Gali būti tokie atvejai: visi trys dėmenys dalijasi iš 3, vienas dėmuo dalijasi iš 3, nė vienas dėmuo nesidalija. Pirmuoju atveju dėmenims parinkti yra C_{33}^3 būdų. Antruoju atveju vieno dėmens dalybos iš 3 liekana lygi 1, antrojo – 2. Kadangi nuo 1 iki 100 yra 34 skaičiai su liekana 1, 33 skaičiai su liekana 2 ir 33 skaičiai, kurie dalijasi iš 3, tai antruoju atveju turime $C_{34}^1\,(C_{33}^1)^2$ variantų. Jei visi trys dėmenys nesidalija iš 3, tai jų liekanos yra arba 1, 1, 1, arba 2, 2, 2. Atitinkamai gauname C_{34}^3 arba C_{33}^3 atvejų. Iš viso turime $2C_{33}^3+C_{34}^3+C_{34}^1\,(C_{33}^1)^2=53\ 922$ pasirinkimo variantus.

198. Sprendžiame panašiai, kaip ir praeitą uždavinį. Atsakymas:

$$3C_n^3+(C_n^1)^3=\frac{n}{2}\,(3n^2-3n+2).$$

199. Jeigu į kišenes dedama p baltųjų rutulių, tai pasirinkti biliardo kišenes yra C_{n+1}^p būdų. Sudėjus baltuosius rutulius, juodajam rutuliui lieka $n-p+1$ kišenių. Kadangi juodojo rutulio galima nedėti, tai gauname $n-p+2$ variantų. Todėl atsakymas bus šitoks: $\sum\limits_{p=0}^{n}(n-p+2)\,C_{n+1}^p=(n+2)\sum\limits_{p=0}^{n}C_{n+1}^p-\sum\limits_{p=0}^{n}pC_{n+1}^p$. Kadangi $\sum\limits_{p=0}^{n}C_{n+1}^p=$ $=2^{n+1}-1$, o $\sum\limits_{p=0}^{n}pC_{n+1}^p=(n+1)\,(2^n-1)$ (žr. 401a uždavinį), tai gauname $(n+3)2^n-1$ variantų.

200. Netuščią baltųjų rutulių grupę žymėkime raide *B*, o juodųjų rutulių – raide **J**. Iš uždavinio sąlygos matyti, kad rutuliai yra išdėstyti arba pagal schemą **JBJB**... **JB**, arba pagal schemą **BJBJ**...**BJ** ir kad kiekvienoje schemoje yra r porų. Suskirstyti m baltų rutulių į r netuščių grupių yra C_{m-1}^{r-1} būdų, o suskirstyti n juodų rutulių į tiek pat grupių – C_{n-1}^{r-1} būdų. Todėl iš viso turime $2C_{m-1}^{r-1}C_{n-1}^{r-1}$ variantų. Panašiai įsitikiname, kad sudaryti $2r$ kontaktų yra $C_{m-1}^r C_{n-1}^{r-1}+C_{m-1}^{r-1}C_{n-1}^r$ būdų.

201. Skaičių būdų surinkti m balų iš n egzaminų, negavus nė vieno dvejetuko, pažymėsime $A(m,\ n)$. Tada aišku, kad $A(30,\ 8)=A(25,\ 7)+A(26,\ 7)+A(27,\ 7)$ ir t. t. Mažindami m toliau, po kelių etapų gausime atsakymą: 784.

202. Pirmiausia pasirenkame n daiktų, paliekamų vietoje. Tai padaryti yra C_{m+n}^{n} būdų. Paskui m likusių daiktų perstatinėjame tol, kol nė vieno daikto nelieka vietoje. Tai padaryti yra D_m būdų (žr. p. 53). Iš viso turime $\frac{(m+n)!}{m!\,n!} D_m$ variantų.

203. Kai $n+p$ žmonių dalijasi r daiktų, tai dalybas įvykdyti yra $(n+p)^r$ būdų. Gali būti $(n+p-1)^r$ atvejų, kai nurodytasis žmogus negaus nė vieno daikto, $(n+p-2)^r$ atvejų, kai du nurodytieji žmonės negaus nė vieno daikto, ir t. t. Remdamiesi priskirties ir išskirties formule, gauname reikalaujamą išvesti formulę.

204. Imkime bet kurį skaičiaus $2r+x$ skirstinį į $r+x$ nelygių nuliui dėmenų. To skirstinio diagramos pirmajame stulpelyje yra $r+x$ elementų. Išbraukę tą stulpelį gauname diagramą, vaizduojančią skaičiaus r skirstinį į neneigiamus dėmenis.

205. Kadangi kiekvienas gali balsuoti už bet kurį iš n žmonių, tai turime n^n galimų balsavimo variantų. Antruoju atveju n kandidatų dalijasi n balsų. Todėl gali būti C_{2n-1}^{n-1} variantų.

206. Sakykime, kad skaičius $2n$ suskirstytas į tris dalis nurodytu būdu: $2n=a+b+c$, $a \leqslant b \leqslant c$. Tada $a \neq 1$, nes priešingu atveju gauname lygybę $b+c=2n-1$, o iš jos nelygybę $b<c$, kuri prieštarauja sąlygai $b+1>c$. Kadangi suma $(a+b)+c$ — lyginis skaičius, tai jos dėmenys $a+b$ ir c yra arba lyginiai, arba nelyginiai. Todėl iš nelygybės $a+b>c$ gauname $a+b>c+1$, arba $(a-1)+(b-1)>c-1$. Iš to matyti, kad skaičiai $a-1$, $b-1$ ir $c-1$ sudaro skaičiaus $2n-3$ skirstinį, tenkinantį nurodytąją sąlygą. Vadinasi, kiekvieną tokio tipo skaičiaus $2n$ skirstinį atitinka analogiškas skaičiaus $2n-3$ skirstinys ir atvirkščiai.

207. Gauname iš lygybės

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots=2^{n-1}.$$

208. Sakykime, kad pirmasis gavo x pirmosios rūšies daiktų, y antrosios rūšies daiktų ir z trečiosios rūšies daiktų. Tada $x+y+z=3n$ ir, be to, $0 \leqslant x, y, z \leqslant 2n$. Vadinasi, reikia sužinoti, kiek sprendinių, reiškiamų sveikais neneigiamais skaičiais, ne didesniais už $2n$, turi lygtis $x+y+z=3n$. Jei nepaisytume sąlygų $x \leqslant 2n$, $y \leqslant 2n$, $z \leqslant 2n$, tai sprendinių skaičius būtų lygus C_{3n+2}^2, t. y. skaičiui, kuris parodo, keliais būdais galima išdalyti $3n$ vienodų daiktų trims asmenims. Todėl belieka sužinoti, kiek yra tokių sprendinių, kuriuose $x>2n$. Apskaičiuojame, kiek iš viso sveikų neneigiamų sprendinių turi lygtys $y+z=k$, kai $0 \leqslant k<n$. Jų skaičius lygus $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Sprendinių, kuriuose $y>2n$ arba $z>2n$, bus tiek pat. Atmetus visus tuos sprendinius, lieka $3n^2+3n+1$ sprendinių.

209. Uždavinys sprendžiamas analogiškai. Gauname

$$C_{4n+3}^3-4\sum_{k=0}^{2n-1} C_{k+2}^2=C_{4n+3}^3-4C_{2n+2}^3=\frac{1}{3}(2n+1)(8n^2+8n+3).$$

210. Kadangi dalys neatskiriamos, tai lygties $x+y+z=3n$ sprendinį x, y, z galima suporuoti su sprendiniu $2n-x$, $2n-y$, $2n-z$. Vienas sprendinys, būtent, $x=n$, $y=n$, $z=n$ suporuojamas pats su savimi, o kiti su skirtingais sprendiniais. Todėl atsakymas yra šitoks:

$$\frac{3n^2+3n}{2}+1.$$

Panašiai nagrinėjamas ir atvejis, kai daiktai yra 4 rūšių.

211. Čia reikia rasti lygties $x_1+x_2+\ldots+x_m=mn$ sveikų sprendinių, tenkinančių sąlygas $0 \leqslant x_k \leqslant 2n$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$, skaičių. Jei nepaisytume sąlygų $x_k \leqslant 2n$, tai gautume C_{mn+m-1}^{m-1} sprendinių. Sužinokime, kiek yra sprendinių, kurių $x_1>2n$. Tokių sprendinių skaičius lygus visų lygčių

$$x_2+x_3+\ldots+x_m=k,$$

$0 \leqslant k \leqslant mn-2n-1$, bendrajam sprendinių skaičiui, t. y.

$$\sum_{k=0}^{mn-2n-2} C_{k+m-2}^{m-2} = C_{mn-2n+m-2}^{m-1}.$$

Tiek pat sprendinių, kuriuose $x_2 > 2n-1$ ir t. t. Vadinasi reikia atmesti $C_m^1 C_{mn+m-2n-2}^{m-1}$ sprendinių. Tačiau tada kai kurie sprendiniai (būtent, tie, kuriuose ir $x_1 > 2n$, ir $x_2 > 2n$) atmetami du kartus. Taikydami priskirties ir išskirties formulę, gauname reikalaujamą įrodyti rezultatą.

212. 231 variantas. Sprendimas aprašytas 213 uždavinyje.

213. Sakykime, kad A gauna x_1 pirmos rūšies daiktų ir y_1 antros rūšies daiktų, $B - x_2$ pirmos rūšies daiktų ir y_2 antros rūšies daiktų, $C - x_3$ pirmos rūšies ir y_3 antros rūšies. Tada turime lygtis $x_1+x_2+x_3=n$ ir $y_1+y_2+y_3=n$, kurių kintamieji tenkina sąlygą $x_k+y_k \leqslant n$ $(k=1, 2, 3)$. Jei nepaisytume apribojimo $x_k+y_k \leqslant n$, $k=1, 2, 3$, tai gautume C_{n+2}^2 pirmosios lygties sprendinių ir tiek pat antrosios lygties sprendinių, o iš viso $(C_{n+2}^2)^2$ sprendinių. Sprendinių, kurie netenkina sąlygos $x_1+y_1 \leqslant n$, yra tiek, kiek sveikų neneigiamų sprendinių turi lygčių sistemos $x_2+x_3=r$, $y_2+y_3=s$, kai $0 \leqslant r < n$, $0 \leqslant s < n$ ir $r+s<n$. Sistema $x_2+x_3=r$, $y_2+y_3=s$ turi $(r+1)(s+1)$ sveikų neneigiamų sprendinių. Todėl visų tų sistemų sprendinių skaičius lygus

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-s-1} (r+1)(s+1) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{n-1} (s+1)(n-s)(n-s+1) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} C_{s+1}^1 C_{n-s+1}^2 = C_{n+3}^4$$

(žr. p. 42). Tiek pat sprendinių netenkina sąlygų $x_2+y_2 \leqslant n$ ir $x_3+y_3 \leqslant n$. Atmetus tuos sprendinius, lieka

$$(C_{n+2}^2)^2 - 3C_{n+3}^4$$

sprendinių. Kai $n=5$, gauname 231 sprendinį.

214. 9 žmones susodinti yra 9! variantų. Sužinosime, kiek yra tokių kėlinių, kuriuose 3 anglai sėdi greta. Visi tokie kėliniai gaunami iš vieno kėlinio, keičiant vietomis vieną anglą su kitu anglu (3! variantų) ir keičiant vietomis prancūzus, turkus ir 3 anglų grupę (7! variantų). Iš viso gauname 3!7! kėlinių. Tiek pat kėlinių, kuriuose greta sėdi 3 prancūzai, ir tiek pat, kuriuose greta sėdi 3 turkai. Be to, yra $(3!)^2 5!$ kėlinių, kuriuose greta sėdi ir anglai, ir prancūzai ir $(3!)^4$ kėlinių, kuriuose greta sėdi ir anglai, ir prancūzai, ir turkai. Pagal priskirties ir išskirties formulę gauname atsakymą:

$$9! - 3 \cdot 3!\,7! + 3\,(3!)^2\,5! - (3!)^4 = 283\,824.$$

215. Visų kėlinių skaičius lygus 9!. Sužinosime, kiek yra tokių kėlinių, kuriuose du nurodytieji anglai sėdi greta. Jei juos laikysime nedaloma grupe, tai gausime 8 objektų kėlinius. Be to, šiuos anglus galima sukeisti vieną su kitu vietomis. Todėl iš viso turime 2! 8! tokių kėlinių. Tuodu anglus pasirinkti yra C_3^2 būdų. Kadangi iš viso turime tris skirtingas tautybes, tai atitinkamas priskirties ir išskirties formulės narys bus lygus $3C_3^2\,2!\,8!$. Dabar sužinokime, kiek yra tokių kėlinių, kuriuose du nurodytieji anglai ir du nurodytieji prancūzai sudaro neišskiriamas poras. Jei du greta sėdinčius tėvynainius laikome nedaloma grupe, tai gauname 7 perstatinėjamus objektus. Be to, galima keisti vietomis greta sėdinčius vienos tautybės atstovus. Iš viso gauname $(2!)^2\,7!$ kėlinių. Kadangi dvi tėvynainių poras pasirinkti yra $(C_3^2)^2$ būdų, tai atitinkamas priskirties ir išskirties formulės dėmuo lygus $(C_3^2)^2\,(2!)^2 7!$. Toliau nagrinėjami atvejai, kai greta sėdi

a) trys vienos tautybės atstovai,
b) po du kiekvienos tautybės atstovus,
c) trys vienos tautybės atstovai ir du — kitos,
d) trys vienos tautybės atstovai ir trys — kitos,

e) trys vienos tautybės atstovai, du — kitos ir du — trečios,
f) trys vienos tautybės atstovai, trys — kitos ir du — trečios,
g) po tris kiekvienos tautybės atstovus.

Taikydami priskirties ir išskirties formulę, gauname tokį atsakymą:

$$9!-9\cdot 2!\,8!+27\,(2!)^2\,7!+3\cdot 3!\,7!-(2!)^3\,6!-18\cdot 3!\,2!\,6!+3\,(3!)^2\,5!+$$
$$+27\cdot 3!\,(2!)^2\,5!-9\,(3!)^2\,2!\,4!+(3!)^4.$$

216. Šitas uždavinys sprendžiamas panašiai, kaip ir praeitas, tik kitaip apskaičiuojama, kiek yra kėlinių, kuriuose nurodytieji tėvynainiai sėdi greta. Du anglus pasodinti greta turime 2!9 būdų, o po to visus kitus persodinti — 9!būdų.Du anglus ir du prancūzus pasodinti taip, kad tie tėvynainiai sėdėtų vienas šalia kito, yra $(2!)^2\,9\cdot 6!$ būdų. Būtent, 9 būdais galima parinkti vietą anglų porai, o paskui, iš dviejų prancūzų sudarius porą, visaip persodinti tą porą ir kitus 5 žmones. Žinodami, kad galima sukeisti vietomis ir greta sėdinčiuosius anglus, ir greta sėdinčius prancūzus, gauname minėtąjį kėlinių skaičių. Panašiai nagrinėjami ir kiti galimi variantai. Iš viso gauname

$$9!-9\cdot 2!\,9\cdot 7!+27\,(2!)^2\,9\cdot 6!+3\cdot 3!\,9\cdot 6!-(2!)^3\,9\cdot 5!-18\cdot 3!\,2!\,9\cdot 5!+$$
$$+3\,(3!)^2\,9\cdot 4!+27\cdot 3!\,(2!)^2\,9\cdot 4!-9\,(3!)^2\,2!\,9\cdot 3!+(3!)^3\,9\cdot 2!$$

variantų.

217. Bendros N kap. vertės ženklų užklijavimo variantų skaičių pažymėkime $F(N)$. Visus tuos variantus suskirstykime į klases, atsižvelgdami į paskutinio užklijuoto pašto ženklo vertę. Gausime rekurentinį sąryšį

$$F(N)=F(N-5)+F(N-10)+F(N-15)+F(N-20).$$

Remdamiesi tuo sąryšiu ir lygybe $F(5)=1$, sužinosime, kad $F(40)=108$.

218. N kap. sumos apmokėjimo $n_1, \ldots, n_m$ kap. vertės monetomis būdų skaičių pažymėkime $F(n_1, \ldots, n_m; N)$. Tada galima parašyti rekurentinį sąryšį

$$F(n_1, \ldots, n_m;\ N)=F(n_1, \ldots, n_{m-1};\ N)+F(n_1, \ldots, n_m;\ N-n_m)$$

(žr. p. 78). Taikydami šitą ir analogiškus sąryšius, sužinome, kad $F(10, 15, 20, 50; 100)=20$.

219. Taikydami rekurentinį sąryšį, sužinome, kad uždavinys turi 4 sprendinius.

220. Eilėje gali būti arba 3 juodi rutuliai, arba 2 juodi rutuliai, arba 1 juodas rutulys. Jei eilėje yra 3 juodi rutuliai, tai ketvirtąjį rutulį galima pasirinkti trimis būdais, o paskui 3 juodus ir 1 kitos spalvos rutulį perstatinėti $P(3, 1)=4$ būdais. Iš viso 12 galimų variantų. Jei imami 2 juodi rutuliai, tai panašiai gauname $C_3^2 P(2, 1, 1)=36$ variantus. Kai imamas 1 juodas rutulys, turime 4! variantų. Iš viso galima sudaryti $12+$ $+36+24=72$ skirtingas eiles.

221. Tokių išraiškų skaičius lygus skirstinių skaičiui, kai n vienodų rutulių skirstoma į 3 netuščias grupes, t. y. C_{n-1}^2.

222. Pirmiausia išsiaiškinkime, kiek reikia nulių, rašant skaičius nuo 1 iki 999 999 imtinai. Yra 99 999 skaičiai (10, 20, ..., 999 990), kurių paskutinis skaitmuo yra nulis; 99 990 skaičių priešpaskutinis skaitmuo yra 0; 99 900 skaičių trečiasis skaitmuo nuo galo yra 0 ir t. t. Iš viso turime $99\,999+99\,990+99\,900+99\,000+90\,000=488\,889$ nulius. Tiems skaičiams parašyti reikia $9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 9000+5\cdot 90\,000+6\cdot 900\,000=$ $5\,888\,889$ skaitmenų. Kadangi visus skaitmenis, išskyrus nulį, reikia parašyti vienodą skaičių kartų, tai kiekvienas skaitmuo pakartojamas po

$$\frac{5\,888\,889-488\,889}{9}=600\,000$$

kartų.

223. Iš pradžių pasirenkame vietas, kuriose bus rašomas skaitmuo 3 (tai padaryti yra C_{10}^2 būdų). Po to likusiose 8 vietose rašome arba skaitmenį 1, arba 2; tai padaryti yra 2^8 būdų. Gauname $2^8 C_{10}^2=11\ 520$ skirtingų skaičių.

Bet kurio gautojo skaičiaus skaitmenų suma yra tarp $8\cdot 1+2\cdot 3=14$ ir $8\cdot 2+2\cdot 3$ $=22$. Todėl, kai tas skaičius dalijasi iš 9, jo skaitmenų suma lygi 18. Vadina-

si, vienetų ir dvejetų suma turi būti lygi 12. Tokią sumą gauname, rašydami 4 vienetus ir 4 dvejetus. Vadinasi, tiriamųjų skaičių išraiškose yra 4 vienetai, 4 dvejetai ir 2 trejetai. Iš tokių skaitmenų galima sudaryti

$$P(4,\ 4,\ 2)=\frac{10!}{4!\,4!\,2!}=3\,150$$

skirtingų skaičių.

224. Sakykime, kad skaičiai a ir b kuriame nors kėlinyje sudaro inversiją. Kai juos sukeičiame vietomis, gauname naują kėlinį, kuriame skaičiai a ir b inversijos nebesudaro. Turime $n!$ kėlinių ir C_n^2 būdų kiekviename kėlinyje pasirinkti skaičius a ir b. Vienu iš dviejų atvejų pasirinktieji skaičiai sudaro inversiją. Vadinasi, inversijų skaičius lygus $\frac{n!}{2}C_n^2$.

225. Yra $C_{n-1}^2=\frac{n^2-3n+2}{2}$ būdų skaičių n išreikšti trijų natūrinių skaičių suma (skirstiniai, kurie vienas nuo kito skiriasi dėmenų eile, čia laikomi skirtingais). Kai n — lyginis skaičius, yra $\frac{n-2}{2}$ skirstinių su dviem vienodais dėmenimis, o kai n — nelyginis, $\frac{n-1}{2}$ tokių skirstinių. Be to, kai n dalijasi iš 3, yra vienas skirstinys, kurio visi trys dėmenys yra vienodi. Taikydami priskirties ir išskirties formulę, lengvai įsitikiname, kad skaičius skirstinių, kuriuose visi trys dėmenys yra skirtingi, reiškiamas tokiomis formulėmis:

$$\frac{n^2-3n+2}{2}-\frac{3}{2}(n-2)+2=\frac{n^2-6n+12}{2},\quad \text{kai}\quad n=6k;$$

$$\frac{n^2-3n+2}{2}-\frac{3}{2}(n-1)=\frac{n^2-6n+5}{2},\quad \text{kai}\quad n=6k+1;$$

$$\frac{n^2-3n+2}{2}-\frac{3}{2}(n-2)=\frac{n^2-6n+8}{2},\quad \text{kai}\quad n=6k+2;$$

$$\frac{n^2-3n+2}{2}-\frac{3}{2}(n-1)+2=\frac{n^2-6n+9}{2},\quad \text{kai}\quad n=6k+3;$$

$$\frac{n^2-3n+2}{2}-\frac{3}{2}(n-2)=\frac{n^2-6n+8}{2},\quad \text{kai}\quad n=6k+4;$$

$$\frac{n^2-3n+2}{2}-\frac{3}{2}(n-1)=\frac{n^2-6n+5}{2},\quad \text{kai}\quad n=6k+5.$$

Jei į dėmenų eilę nekreipsime dėmesio, tai skirstinių gausime 6 kartus mažiau. Lengva patikrinti, kad tada gaunami reiškiniai yra $\frac{n^2-6n+12}{12}$ sveikoji dalis, atitinkanti įvairias n reikšmes.

226. Yra C_{12n+4}^3 būdų skaičių $12n+5$ išreikšti keturių dėmenų suma (skirstiniai, kurie vienas nuo kito skiriasi dėmenų eile, laikomi skirtingais). Skirstinių, kuriuose $x=y$, skaičius lygus lygties $2x+z+t=12n+5$ natūrinių sprendinių skaičiui. Kadangi lygtis $z+t=12n-2k+5$ turi $12n-2k+4$ natūrinius sprendinius, tai lygtis $2x+z+t=12n+5$ turi

$$\sum_{k=1}^{6n+1}(12n-2k+4)=(6n+1)(6n+2)=2C_{6n+2}^2$$

tokių sprendinių. Sprendinių, kuriuose $x=y=z$, skaičius lygus lygties $3x+t=12n+5$ natūrinių sprendinių skaičiui, t. y. $4n+1$.

Sužinosime, kiek sprendinių turi dėmenis, didesnius už $6n+2$. Tarkime, kad $x=k\geqslant 6n+3$. Tada $y+z+t=12n+5-k$. Skaičių $12n+5-k$ išreikšti trijų natūrinių dėmenų suma yra $C^2_{12n+4-k}$ būdų. Todėl sprendinių, kuriuose $x\geqslant 6n+3$, skaičius lygus

$$\sum_{k=6n+3}^{12n+2} C^2_{12n+4-k}=C^3_{6n+2}.$$

Kadangi vietoj x gali būti bet kuris dėmuo, tai turime $C^3_{12n+4}-4C^3_{6n+2}$ skirstinių, kurių visi dėmenys neviršija $6n+2$.

Lygties $2x+y+z=12n+5$ sprendinių, kuriuose $z\geqslant 6n+3$, skaičius lygus $3n$ $(3n+1)$ $2C^2_{3n+1}$. Todėl skaičius sprendinių, kuriuose $x=y$ ir visi dėmenys neviršija $6n+2$, lygus $2(C^2_{6n+2}-2C^2_{3n+1})$. Kadangi vietoj x ir y galima imti bet kurią kitą raidžių x, y, z ir t porą, tai skaičius skirstinių, kurių du dėmenys yra vienodi ir nė vienas dėmuo neviršija $6n+2$, lygus

$$2C^2_4\,(C_{6n+2}-2C^2_{3n+1}).$$

Lygties $3x+t=12n+5$ sprendinių, kuriuose $t\geqslant 6n+3$, skaičius lygus $2n$. Todėl skaičius skirstinių, kurių trys dėmenys yra vienodi ir nė vienas dėmuo neviršija $6n+2$, lygus $4\,(2n+1)$.

Jei iš visų skirstinių atmesime tuos, kurių du dėmenys sutampa, tai tie skirstiniai, kurių trys dėmenys yra vienodi, bus atmesti tris kartus. Todėl priskirties ir išskirties formulėje jų skaičių reikia padauginti iš 2. Iš viso gauname

$$(C^3_{12n+4}-4C^3_{6n+2})-2C^2_4\,(C^2_{6n+2}-2C^2_{3n+1})+8\,(2n+1)=12n\,(12n^2+3n-1)$$

skirstinių, kurių visi keturi dėmenys yra skirtingi,

$$2C^2_4\,(C^2_{6n+2}-2C^2_{3n+1})-12\,(2n+1)=12n\,(9n+4)$$

skirstinių, kuriuose yra lygiai trys skirtingi dėmenys, ir $4(2n+1)$ skirstinių, kuriuose yra tik du skirtingi dėmenys.

Visus skirstinius suskirstysime į klases, vienai klasei priskirdami tuos skirstinius, kurie vienas nuo kito skiriasi tik dėmenų eile. Tada pirmojo tipo skirstiniai sudarys klases, turinčias po 24 elementus, antrojo tipo – po 12 elementų, trečiojo tipo – po 4 elementus. Todėl reikalingojo tipo skirstinių skaičius lygus

$$\frac{n}{2}\,(12n^2+3n-1)+n\,(9n+4)+2n+1=\frac{n+1}{2}\,(12n^2+9n+2).$$

227. Spręsdami praeitą uždavinį, sužinojome, kad skaičius tokių skirstinių, kurių visi dėmenys yra skirtingi, lygus $12n\,(12n^2+3n-1)$. Kadangi dabar į dėmenų eilę nekreipiame dėmesio, tai gauname $\frac{n}{2}\,(12n^2+3n-1)$ skirstinių.

228. Geometrinė progresija nusakoma pirmuoju nariu a ir vardikliu q. Jei progresija didėja, tai turi būti teisinga nelygybė $aq^2\leqslant 100$; iš to matyti, kad $a\leqslant\frac{100}{q^2}$. Vadinasi, didėjančių trinarių progresijų su vardikliu q skaičius lygus $\left[\frac{100}{q^2}\right]$. Visų tokių progresijų skaičius lygus

$$2\left(\left[\frac{100}{4}\right]+\left[\frac{100}{9}\right]+\left[\frac{100}{16}\right]+\ldots+\left[\frac{100}{100}\right]\right)=106$$

(daugiklis 2 rašomas todėl, kad tą patį skaičių trejetą galima laikyti ir didėjančia, ir mažėjančia progresija).

229. Kelių vienas šalia kito stovinčių prancūzų grupę žymėkime raide P, o kelių taip stovinčių turkų grupę – raide T. Raidė „a" reiškia anglą. Iš uždavinio sąlygos matyti, kad gali būti dviejų tipų dėstiniai: PaTaPaTaPaTaP arba TaPaTaPaTaPaT. Pirmuoju atveju 7 prancūzus reikia suskirstyti į 4 netuščias grupes (C^3_6 variantų), o 10 turkų –

į 3 netuščias grupes (C_9^2 variantų). Paskui sudarytąsias grupes reikia pastatyti iš eilės atitinkamose vietose ir visais galimais būdais keisti vieną tėvynainį su kitu vietomis. Gauname 6! 7! 10! $C_6^3 C_9^2$ išrikiavimo variantų. Iš antrojo tipo dėstinio panašiai gauname 6! 7! 10! $C_6^2 C_9^3$ išrikiavimo variantų. Iš viso turime

$$6!\,7!\,10!\,(C_6^3 C_9^2 + C_6^2 C_9^3) = 6!\,7!\,10!\,1980$$

sprendinių.

230. Galvodami panašiai, kaip ir praeitame uždavinyje, gauname 5! 7! 10! 1080 sprendinių.

231. Ieškomieji skaičiai skiriasi vienas nuo kito dauginamaisiais a^α, b^β, c^γ ir d^δ: kiekvienas dauginamasis yra vieno skaičiaus skaidinyje, bet nėra kito skaičiaus skaidinyje. Kadangi 4 dauginamuosius suskirstyti dviem skaičiams yra $2^4=16$ būdų, tai uždavinys turi 16 sprendinių. Jei nekreipiame dėmesio į skaičių eilę, tai gauname 8 sprendinius.

232. Ieškomieji skaičiai yra GA ir GB, jei A ir B — skaičiaus $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ dalikliai. Tas skaičius turi $N=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)$ daliklių (žr. 67 uždavinį). Todėl, kai porą (GA, GB) neskiriame nuo poros (GB, GA), turime C_{N+1}^2 skaičių A ir B pasirinkimo būdų; kai tos poros laikomos skirtingomis, yra N^2 pasirinkimo būdų.

233. Galima sudaryti C_{20}^6 derinių, kurių visos raidės skirtingos, $C_{20}^1 C_{19}^4$ derinių, kuriuose yra viena vienodų raidžių pora, ir t. t. Iš viso gauname

$$C_{20}^6 + C_{20}^1 C_{19}^4 + C_{20}^2 C_{18}^4 + {}_{20}^3 = 146\,490$$

derinių.

234. Ieškomieji kėliniai prasideda keliomis raidėmis α, po kurių stovi raidė β, o toliau raidės gali eiti bet kokia tvarka. Jei pradžioje stovi k raidžių α ir viena raidė β, tai, kitas raides perstatinėdami, galime sudaryti $P(p-k,\ q-1,\ r)$ skirtingų kėlinių. Sumuodami k atžvilgiu nuo 1 iki p, sužinome, kad ieškomųjų kėlinių skaičius lygus

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{(p+q+r-k-1)!}{(p-k)!\,(q-1)!\,r!} = C_{q+r-1}^{r} \sum_{k=1}^{p} C_{p-k+q+r-1}^{p-k}.$$

Kadangi

$$\sum_{k=1}^{p} C_{p-k+r-1}^{p-k} = C_{p+q+r-1}^{p-1},$$

tai ieškomųjų kėlinių skaičius lygus $C_{q+r-1}^{r} C_{p+q+r-1}^{p-1}$.

235. Skaičiai, reiškiantys kiekvienos spalvos atkarpų ilgį, sudaro skaičiaus 10 skirstinį į dėmenis, kurie įgyja reikšmes nuo 2 iki 10; čia svarbi ir dėmenų eilė. Tokių skirstinių į k dėmenų skaičius lygus koeficientui prie x^{10} reiškinio

$$(x^2+x^3+\ldots+x^{10})^k = \left(\frac{x^2-x^{11}}{1-x}\right)^k = x^{2k}(1-x^9)^k(1-x)^{-k} =$$

$$= x^{2k}\left(1-kx^9+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^{18}-\ldots\right)\left(1+kx+\frac{k(k+1)}{1\cdot 2}x^2+\right.$$

$$\left.+\frac{k(k+1)(k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+\frac{k(k+1)\ldots(k+9)}{10!}x^{10}+\ldots\right)$$

dėstinyje. Iš čia sužinome, kad ieškomasis koeficientas lygus 1, kai $k=1$. Kai $k=2$, jis lygus 7; kai $k=3$, lygus 15; kai $k=4$, lygus 10 ir, kai $k=5$, lygus 1. Kadangi, dažant aprašytuoju būdu, visų spalvų atkarpų skaičius yra vienodas, o skirtingų spalvų atkarpų ilgius galima kombinuoti laisvai, tai gauname $1^3+7^3+15^3+10^3+1^3=4720$ dažymo variantų.

Dabar atsisakykime sąlygos, kad paskutinė atkarpa turi būti mėlyna. Jei baigiama dažyti raudona spalva, tai ji panaudota vienu kartu daugiau, negu balta ir mėlyna spalva. Tokiu atveju dažymo variantų skaičius lygus

$1+7\cdot 1^2+15\cdot 7^2+10\cdot 15^2+1\cdot 10^2=3093$. Panašiai įsitikiname, kad tuo atveju, kai paskutinė atkarpa yra balta, dažymo variantų skaičius lygus $1^2+7^2\cdot 1+15^2\cdot 7+10^2\cdot 15+1^2\cdot 10=3135$. Iš viso turime 10 948 variantus.

Jei visų atkarpų ilgis nėra mažesnis už 3 cm, tai reikia apskaičiuoti, kiek skirstinių k natūrinių dėmenų suma turi skaičius 10, kai dėmenys įgyja reikšmes nuo 3 iki 10. Kai $k=1$, turime vieną skirstinį; kai $k=2$, – penkis skirstinius, kai $k=3$, – tris skirstinius. Todėl baigiama dažyti mėlyna spalva $1^3+5^3+3^3=153$ kartus, raudona spalva $1+5\cdot 1^2+3\cdot 5^2=81$ kartą, o balta spalva $1^2+5^2\cdot 1+3^2\cdot 5=71$ kartą.

236. Kadangi su visais šešiais draugais aš pietavau vieną kartą, o su kiekvienu penketuku – du kartus, tai su kiekvienu draugų penketuku, nedalyvaujant šeštajam, aš pietavau po vieną kartą. Iš to matyti, kad su kiekvienu ketvertuku aš pietavau 3 kartus (du kartus penkiese ir vieną kartą šešiese), su kiekvienu trejetuku – 4 kartus, o su kiekviena pora – 5 kartus. Su kiekvienu draugu prie pietų stalo esu susitikęs 7 kartus. Vadinasi, po vieną kartą esu pietavęs su kiekvienu draugu dviese. Kiekvienas draugas nedalyvavo 6 kartus (5 kartus, kai pietavau dviese, ir vieną kartą, kai pietavome penkiese). Kadangi be kiekvieno draugo esu pietavęs 8 kartus, tai du kartus pietavau vienas.

237. Iš 12 mokinių sudaryti eilę prie vieno egzaminatoriaus yra $12!$ būdų, o prie dviejų egzaminatorių – $(12!)^2$ būdų. Be to, bus $C_{12}^2\,11!$ atvejų, kai bent vienas mokinys turės iš karto atsakinėti abiem egzaminatoriams, $C_2^{12}\,10!$ atvejų, kai toks nemalonumas ištiks bent du mokinius, ir t. t. Taikydami priskirties ir išskirties formulę, sužinome, kad gerų išdėstymo variantų skaičius lygus

$$(12!)^2\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{1}{12!}\right)=12!\cdot 176\,214\,841.$$

238. Analogiškai gauname tokius atsakymus:

$$(6!)^2\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{6!}\right)=190\,800,$$

$$(A_9^6)^2-C_6^1A_9^1(A_8^5)^2+C_6^2A_9^2(A_7^4)^2-C_6^3A_9^3(A_6^3)^2+C_6^4A_9^4(A_5^2)^2-C_6^5A_9^5(A_4^1)^2+C_6^6A_9^6.$$

239. Iš sąlygos matyti, kad vienodos reiškinio $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ raidės kėliniuose sudaro neišskiriamas poras. Todėl gauname kėlinius iš trijų elementų $a=\alpha^2$, $b=\beta^2$, $c=\gamma^2$, o tokių kėlinių skaičius lygus 6. Tą patį galima pasakyti ir apie reiškinio $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ raidžių kėlinius. Reiškinio $\alpha^4\beta^4\gamma^4$ raidžių kėliniuose vienodos raidės irgi sudaro poras. Laikinai tarkime, kad $\alpha^2=a_1$, $\alpha^2=a_2$; $\beta^2=b_1$, $\beta^2=b_2$; $\gamma^2=c_1$, $\gamma^2=c_2$. Tada turime 6 elementų a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 kėlinius, kurių skaičius lygus 720. Tačiau tuos kėlinius galima suskirstyti į grupes, sudarytas iš kėlinių, kurie vienas nuo kito skiriasi tik tuo, kad juose raidės a_1 ir a_2, b_1 ir b_2, c_1 ir c_2 yra sukeistos vietomis. Kiekvieną grupę sudaro 8 kėliniai, ir visi tie kėliniai atitinka tik vieną reiškinio $\alpha^4\beta^4\gamma^4$ raidžių kėlinį. Vadinasi, iš to reiškinio raidžių galima sudaryti $\frac{720}{8}=90$ nurodyto tipo kėlinių.

Pagaliau išnagrinėkime kėlinius iš reiškinio $\alpha^5\beta^5\gamma^5$ raidžių. Jei laikinai tarsime, kad $\alpha^2=a_1$, $\alpha^3=a_2$; $\beta^2=b_1$, $\beta^3=b_2$; $\gamma^2=c_1$, $\gamma^3=c_2$, tai kiekvieną galimą reiškinio $\alpha^5\beta^5\gamma^5$ raidžių kėlinį atitiks raidžių a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 kėlinys. Tačiau kai kurie skirtingi raidžių a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 kėliniai atitinka tą patį raidžių α, β, γ kėlinį. Pavyzdžiui, ir iš $a_1a_2b_1c_2b_2c_1$ ir iš $a_2a_1b_1c_2b_2c_1$ gauname $\alpha^5\beta^2\gamma^3\beta^3\gamma^2$. Taip atsitinka tada, kai kokia nors raidžių pora (a_1, a_2), (b_1, b_2) arba (c_1, c_2) nėra suardyta. Yra $2\cdot 5!$ kėlinių, kuriuose raidės a_1 ir a_2 stovi greta; tiek pat kėlinių su greta stovinčiomis raidėmis b_1 ir b_2 arba c_1 ir c_2. Yra $(2!)^2 4!$ kėlinių, kuriuose nesuardytos dvi poros (a_1, a_2) ir (b_1, b_2); tiek pat kėlinių, kuriuose nesuardytos poros (a_1, a_2) ir (c_1, c_2) arba poros (b_1, b_2) ir (c_1, c_2). Pagaliau turime $(2!)^3 3!=48$ kėlinius, kuriuose nesuardyta nė viena iš minimųjų porų. Pagal priskirties ir išskirties formulę apskaičiuojame, kad galima sudaryti

$$6!-6\cdot 5!+3\,(2!)^2\cdot 4!-(2!)^3\,3!=240$$

kėlinių, kuriuose visos poros yra suardytos,

$$3\left(2\cdot 5!-2\,(2!)^2\,4!+(2!)^3\,3!\right)=288$$

kėlinių, kuriuose tiktai viena pora – arba (a_1, a_2), arba (b_1, b_2), arba (c_1, c_2) – nėra suardyta,

$$3\left((2!)^2\,4!-(2!)^3\,3!\right)=144$$

kėlinių, kuriuose tiktai dvi poros nėra suardytos. Iš to išplaukia, kad ieškomasis raidžių α, β, γ kėlinių skaičius lygus

$$240+\frac{288}{2!}+\frac{144}{(2!)^2}+\frac{48}{(2!)^3}=426$$

(jei raidės a_1 ir a_2 stovi viena prie kitos, tai jų sukeitimas vietomis nepakeičia raidžių α, β, γ kėlinio).

240. Pirmiausia kiekvienos šalies sportininkus suskirstome į sutvarkytas poras. Vienos šalies atstovus taip suskirstyti yra $\frac{4!}{2}=12$ būdų (pačių porų eilė nesvarbi). Iš viso gauname 12^n suskirstymo variantų. Poras sukeitinėdami vieną su kita vietomis, gauname $(2n)!$ kėlinių. Todėl visų sąlygoje aptartųjų kėlinių skaičius lygus $12^n\,(2n)!$.

241. Nudažyti pirmąją horizontalę yra 8! būdų. Dažant bet kurią tolesnę horizontalę, reikia žiūrėti, kad kiekvieno jos langelio spalva būtų kitokia, negu po juo esančio langelio spalva. Todėl tą horizontalę nudažyti galima

$$8!\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}\right)=14\,833$$

būdais. Taikydami dauginimo taisyklę, įsitikiname, kad visų lentos nudažymo variantų skaičius lygus $8!\,(14\,833)^7$.

242. Iš n skirtingų daiktų sudaryti 2^n įvairių ėminių (juose gali būti 0, 1, ..., n daiktų). Pasirinkus kurį nors ėminį, prie jo galima prijungti trūkstamus daiktus iš vienodų daiktų grupės. Todėl turime 2^n pasirinkimo variantų. Iš visų $2n$ daiktų galima sudaryti $\frac{(2n)!}{n!}$ skirtingų kėlinių.

243. Kiekviename tenkinančiame sąlygą kėlinyje ir anglai, ir pranzūzai stovi grupėmis, kuriose yra bent po du žmones. Be to, prancūzų grupių skaičius ne daugiau kaip 1 skiriasi nuo anglų grupių skaičiaus. Apskaičiuokime, keliais būdais galima suskirstyti n anglų į p sutvarkytų grupių, kad kiekvienai grupei priklausytų bent du žmonės. Tam juos reikia sustatyti į eilę ($n!$ variantų) ir atsiradusiuose tarpuose nuo antrojo tarpo iki $(n-2)$-jo tarpo imtinai pastatyti $p-1$ „pertvarų" taip, kad pertvaros nebūtų gretimuose tarpuose. Iš rezultatų, gautų 70 puslapyje, matyti, kad tai padaryti yra C_{n-p-1}^{p-1} būdų. Iš viso gauname $n!\,C_{n-p-1}^{p-1}$ suskirstymo variantų. Panašiai skirstydami n prancūzų į s pageidaujamo tipo grupių, gauname $m!\,C_{m-s-1}^{s-1}$ variantų. Kiekvieną anglų suskirstymo variantą galima kombinuoti su bet kuriuo prancūzų suskirstymo variantu tokiais būdais:

a) p anglų grupių ir $p-1$ prancūzų grupių,
b) p anglų grupių ir p prancūzų grupių, priekyje statant anglus,
c) p anglų grupių ir p prancūzų grupių, priekyje statant prancūzus,
d) p anglų grupių ir $p+1$ prancūzų grupių.

Vadinasi, visų galimų variantų skaičius reiškiamas formule

$$m!\,n!\Big(2\,(C_{m-2}^{0}C_{n-2}^{0}+C_{m-3}^{1}C_{n-3}^{1}+C_{m-4}^{2}C_{n-4}^{2}+\ldots)+$$

$$+(C_{m-2}^{0}C_{n-3}^{1}+C_{m-3}^{1}C_{n-4}^{2}+\ldots)+(C_{m-3}^{1}C_{n-2}^{0}+C_{m-4}^{2}C_{n-3}^{1}+\ldots)\Big).$$

Jei 172 puslapyje parašytame reiškinyje atliksime veiksmus, tai gausime tą patį rezultatą.

244. Pirmiausia sužinokime, kiek skaičių neturi skaitmens 0. Tris skaitmenis, kuriais rašomas skaičius, galima pasirinkti $C_9^3=84$ būdais. Iš trijų skaitmenų galima sudaryti 3^6 šešiaženklių skaičių, iš dviejų 2^6 tokių skaičių, o iš vieno 1^6. Taikydami priskirties ir išskirties formulę, sužinosime, kad yra

$$3^6-C_3^1\cdot 2^6+C_3^2\cdot 1^6=540$$

šešiaženklių skaičių, kuriuos rašant vartojami visi trys pasirinktieji skaitmenys. Todėl tokių šešiaženklių skaičių, kurių kiekvienas parašomas tiktai trimis skirtingais skaitmenimis, iš viso yra $84 \cdot 540=45\ 360$.

Jei skaičiui parašyti vartojamas ir skaitmuo 0, tai reikia pasirinkti dar du jį sudarančius skaitmenis. Tai padaryti galima $C_9^2=36$ būdais. Sakykime, pavyzdžiui, kad pasirinktieji skaitmenys yra 0, 1 ir 2. Tada pirmuoju skaitmeniu turi būti arba 1, arba 2. Jei, pavyzdžiui, pirmasis skaitmuo yra 1, tai kiti skaitmenys gali būti 0, 1 ir 2, bet nors vieną kartą turi būti parašytas 0 ir nors vieną kartą — skaitmuo 2. Taikydami priskirties ir išskirties formulę, sužinome, kad tiems penkiems skaitmenims pasirinkti yra

$$3^5-C_2^1\cdot 2^5+1^6=180$$

būdų. Iš to matyti, kad šešiaženklių skaičių, parašomų skaitmenimis 0, 1 ir 2 ir turinčių visus tris skaitmenis, yra $2\cdot 180=360$. Vadinasi, šešiaženklių skaičių, sudaromų iš trijų skaitmenų, iš kurių vienas yra nulis, iš viso yra $36\cdot 360=12\ 960$. Iš viso gauname $45\ 360+12\ 960=58\ 320$ skaičių.

245. Samprotaudami panašiai, kaip 244 uždavinyje, gauname tokį atsakymą:

$$C_9^k\left(k^m-C_k^1(k-1)^m+C_k^2(k-2)^m-\ldots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}1^m\right)+$$

$$+(k-1)C_9^{k-1}\left(k^{m-1}-C_{k-1}^1(k-1)^{m-1}+C_{k-1}^2(k-2)^{m-1}-\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-2}C_{k-1}^{k-2}1^{m-1}\right).$$

246. Tokių gretinių skaičių žymėkime simboliu $\Gamma_n^{(k)}$. Tuos gretinius suskirstome į dvi klases, pirmajai klasei priskirdami gretinius, prasidedančius vienetu, o antrajai — visus kitus gretinius. Jei gretinys prasideda vienetu, tai iš visų jo skaičių atimame po 1 ir nubraukiame pradžioje atsiradusį nulį (pavyzdžiui, iš 14589 pirma gauname 03478, o paskui 3478). Gauname $(k-1)$-elementį to paties tipo gretinį, sudarytą iš skaičių 1, 2, ..., $n-1$. Todėl pirmajai klasei priklauso $\Gamma_{n-1}^{(k-1)}$ gretinių. Kiekvienas antrosios klasės gretinys prasideda skaičiumi, didesniu už 2. Iš visų skaičių, sudarančių tokį gretinį, atimame po 2. Gauname k-elementį to paties tipo gretinį, sudarytą iš skaičių 1, 2, ..., $n-2$. Todėl antrajai klasei priklauso $\Gamma_{n-2}^{(k)}$ gretinių. Vadinasi, galima rašyti rekurentinę formulę

$$\Gamma_n^{(k)}=\Gamma_{n-1}^{(k-1)}+\Gamma_{n-2}^{(k)},$$

Simboliu $F_n^{(k)}$ pažymėkime C_N^k, kai $N=E\left(\frac{n+k}{2}\right)$. Tokiu atveju

$$F_{n-1}^{(k-1)}+F_{n-2}^{(k)}=C_{N-1}^{k-1}+C_{N-1}^k=C_N^k=F_n^{(k)}.$$

Vadinasi, skaičiai $F_n^{(k)}$ tenkina tą patį rekurentinį sąryšį, kaip ir skaičiai $\Gamma_n^{(k)}$.

Dabar įrodysime, kad $F_n^{(n)}=\Gamma_n^{(n)}$ ir $F_{n+1}^{(n)}=\Gamma_{n+1}^{(n)}$. Pastebėsime, kad skaičius 1, 2, ..., n parašyti didėjančia eile yra tik vienas būdas, todėl $\Gamma_n^{(n)}=1=C_n^n=F_n^{(n)}$. Iš skaičių 1, 2, ..., $n+1$ irgi tik vienu būdu galima pasirinkti n skaičių, tenkinančių nurodytąsias sąlygas. Todėl ir $\Gamma_{n+1}^{(n)}=1=C_n^n=F_{n+1}^{(n)}$. Iš įrodytųjų teiginių matyti, kad lygybė

$$\Gamma_n^{(k)}=F_n^{(k)}=C_N^k$$

yra teisinga su visomis n ir k reikšmėmis. Primename, kad čia $N=E\left(\frac{n+k}{2}\right)$.

247. Iš turimųjų elementų galima sudaryti

$$P(2,\ 2,\ \ldots,\ 2)=\frac{(2n)!}{2^n}$$

kėlinių. Sužinosime, kiek yra tokių kėlinių, kuriuose k nurodytųjų porų elementai stovi greta. Tokiame kėlinyje iš greta stovinčių vienos poros elementų galima sudaryti vieną

objektą. Tada turėsime kėlinį, sudarytą iš k skirtingų objektų ir elementų, priklausančių $n-k$ poroms. Tokių kėlinių skaičius lygus $\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$. Kadangi pasirinkti k porų yra C_n^k būdų, tai, remdamiesi priskirties ir išskirties formule, įsitikiname, kad yra

$$\frac{(2n)!}{2^n}-C_n^1\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}+C_n^2\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}-\ldots+(-1)^n C_n^n n!$$

kėlinių, kuriuose nėra greta stovinčių vienodų elementų.

248. Panašiai, kaip ir praeitame uždavinyje, gauname tokį atsakymą:

$$\frac{(qn)!}{(q!)^n}-C_n^1\frac{(qn-q+1)!}{(q!)^{n-1}}+C_n^2\frac{(qn-2q+2)!}{(q!)^{n-2}}-\ldots$$

249. Iš turimųjų elementų galima sudaryti $\frac{(qn)!}{(q!)^n}$ kėlinių. Apskaičiuosime, kiek yra tokių kėlinių, kuriuose k duotųjų rinkinių elementai stovi vienas prie kito. Pasirinkime vieną iš tų q-elemenčių rinkinių. Jo elementus išdėstyti apskritime, neatskiriant vieną elementą nuo kito, yra qn būdų. Visą rinkinį patalpinę kurioje nors vietoje, turėsime dar $k-1$ nedalijamų rinkinių, kuriuos galima laikyti tam tikrais objektais. Iš $k-1$ tų objektų ir $(n-k)q$ likusių elementų sudarysime visus galimus kėlinius. Jų skaičius lygus $\frac{(qn-qk+k-1)!}{(q!)^{n-k}}$. Lengva pastebėti, kad kiekvieną tokį kėlinį atitinka elementų dėstinys apskritime. Todėl skaičius kėlinių, kuriuose k duotųjų rinkinių elementai stovi vienas prie kito, lygus $\frac{qn\,(qn-qk+k-1)!}{(q!)^{n-k}}$. Kadangi tas nedalomąsias grupes pasirinkti yra C_n^k būdų, tai, remdamiesi priskirties ir išskirties formule, sužinome, kad sąlygoje nurodytų kėlinių skaičius lygus

$$qn\left(\frac{(qn-1)!}{(q!)^n}-C_n^1\frac{(qn-q)!}{(q!)^{n-1}}+C_n^2\frac{(qn-2q+1)!}{(q!)^{n-2}}-\ldots+(-1)^n C_n^n(n-1)!\right).$$

250. Prie kiekvienos pasirenkamos knygos prijunkime s po jos stovinčių knygų. Tada mums reikės iš $n-ps$ daiktų pasirinkti p daiktų. Tai padaryti yra C_{n-ps}^p būdų.

251. Jei progresijos skirtumas lygus d, o penktos klasės mokinių, dalyvaujančių olimpiadoje, skaičius lygus a, tai premijas paskirstyti yra $A_a^d A_{a+d}^d A_{a+2d}^d\ldots A_{a+5d}^d$ būdų. Jei visas premijas atiduotume dešimtajai klasei, tai jas paskirstyti turėtume A_{a+5d}^{6d} būdų. Lygybė

$$A_a^d A_{a+d}^d A_{a+2d}^d\ldots A_{a+5d}^d=A_{a+5d}^{6d}$$

išplaukia iš akivaizdžios lygybės $A_n^m A_{n+k}^k=A_{n+k}^{m+k}$.

252. Sprendžiant šį uždavinį, reikia išnagrinėti įvairių padėčių atkarpas bei sankryžas ir apskaičiuoti, kiek per jas eina kelių. Pavyzdžiui, per atkarpą EF (36 pav.) eina 18 kelių: iš taško A į tašką E ateina $C_3^1=3$ keliai, o iš taško F į tašką C išeina $C_4^2=6$ keliai. Per tašką E eina 30 kelių: iš A į E ateina 3 keliai, o iš E į C išeina $C_5^2=10$ kelių. Panašiai nagrinėjamos ir kitos atkarpos bei sankryžos.

253. $C_6^3=20$.

254. Turime derinius su pasikartojimais, sudarytus iš 4 rūšių elementų po tris elementus derinyje. Jų skaičius lygus

$$\bar{C}_4^3=C_6^3=20.$$

255. $\bar{C}_{10}^3=C_{12}^3=220$.

256. 4 trikampiai.

257. Jei nebūtų trijų taškų, priklausančių vienai tiesei, tai galėtume sudaryti C_n^3 trikampių su viršūnėmis tuose taškuose. Kadangi p taškų yra vienoje tiesėje, tai C_p^3 trikampių reikia atmesti. Lieka $C_n^3-C_p^3$ trikampių.

258. Dvi viršūnės gali priklausyti vienai tiesei, o trečioji – kitai. Todėl gauname $C_p^2 C_q^1 + C_p^1 C_q^2 = \frac{pq}{2}(p+q-2)$ trikampių.

259. Prisideda $C_r^2 (C_p^1 + C_q^1) + C_r^1 (C_p^2 + C_q^2) + C_r^1 C_p^1 C_q^1 = \frac{r}{2}(p+q)(p+q+r-2)$ trikampių.

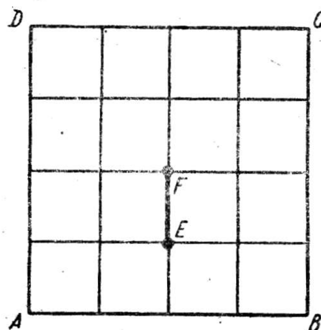
260. Trikampiai gali būti dviejų rūšių: arba visos trys viršūnės priklauso skirtingoms kvadrato kraštinėms, arba dvi viršūnės priklauso vienai kvadrato kraštinei, o trečioji – kokiai nors kitai. Pirmuoju atveju reikia pasirinkti tris kvadrato kraštines iš keturių ($C_4^3 = 4$ pasirinkimo variantai), o paskui – kiekvienoje kraštinėje po vieną tašką iš $n-1$ taškų. Iš viso yra $4(C_{n-1}^1)^3$ variantų. Antruoju atveju reikia pasirinkti kraštinę, kuriai priklauso dvi trikampio viršūnės (4 variantai), ir joje du taškus iš $n-1$ taškų (C_{n-1}^2 variantų). Paskui pasirenkame vieną iš trijų likusių kraštinių (3 variantai) ir tašką toje kraštinėje (C_{n-1}^1 variantų). Antruoju atveju gauname $12 C_{n-1}^1 C_{n-1}^2$ pasirinkimo variantų. Iš viso gauname

$$4(C_{n-1}^1)^3 + 12 C_{n-1}^1 C_{n-1}^2 = 2(n-1)^2(5n-8)$$

trikampių.

261. C_n^2 susikirtimo taškų.

262. Bendruoju atveju n tiesių turi C_n^2 susikirtimo taškų. Tačiau p, tiesių, einančių per tašką A, vietoj C_p^2 susikirtimo taškų turi tik vieną bendrą tašką, o q tiesių, einančių per tašką B, vietoj C_q^2 taškų – irgi tik vieną. Todėl lieka $C_n^2 - C_p^2 - C_q^2 + 2$ susikirtimo taškų.



36 pav.

263. Sakykime, kad plokštumoje nubrėžta $k-1$ tiesių. Nubrėžkime dar vieną tiesę. Anksčiau nubrėžtosios tiesės ją padalija į k dalių, o kiekvieną dalį atitinka vienas naujas plokštumos gabalas. Todėl n tiesių dalija plokštumą į $1+1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ dalių.

264. Sakykime, kad erdvėje yra $k-1$ plokštumų. Išveskime dar vieną plokštumą. Anksčiau išvestosios plokštumos joje iškerta $k-1$ tiesių, kurios padalija naująją plokštumą į $\frac{1}{2}(k^2-k+2)$ dalių. Kiekvieną tų dalių atitinka nauja erdvės dalis. Todėl n plokštumų dalija erdvę į

$$1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+2) = \frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$$

dalių.

265. Nubrėžta $C_5^2 = 10$ tiesių. Per kiekvieną tašką, pavyzdžiui, C eina 4 tiesės. Vadinasi, iš to taško išeina 6 statmenys. Imkime du kokius nors taškus, pavyzdžiui, B ir C. Statmenys, nuleisti iš taško B į tieses, einančias per tašką C, kerta visus statmenis, nuleis-

tus iš taško C. Per tašką C eina trys tiesės, neinančios per tašką B. Todėl iš B į tas tieses galima nuleisti 3 statmenis. Jie susikerta su 6 statmenimis, nuleistais iš taško C, ir sudaro $3 \cdot 6 = 18$ susikirtimo taškų. Kiekvienas statmuo, nuleistas iš taško B į kitas 3 tieses, neinančias per tašką C, kerta tik 5 statmenis, nuleistus iš taško C, nes jis yra lygiagretus vienam iš statmenų, nuleistų iš taško C (jie nuleisti į tą pačią tiesę). Gauname dar 15 susikirtimo taškų. Vadinasi, statmenys, nuleisti iš dviejų taškų, turi $18+15=33$ susikirtimo taškus.

Iš 5 pradžioje duotų taškų galima sudaryti 10 porų. Todėl turėtume $33 \cdot 10 = 330$ susikirtimo taškų, bet kai kurie iš tų taškų sutampa. Būtent, bet kurie 3 iš 5 pradžioje duotų taškų sudaro trikampį. Kai kurie statmenys – to trikampio aukštinės – susikerta viename taške, o mes tą tašką laikėme trimis taškais. Kadangi tokių trikampių galima sudaryti $C_5^3 = 10$, tai reikia atmesti 20 taškų. Vadinasi, lieka 310 galimų susikirtimo taškų.

266. Trys natūriniai skaičiai x, y ir z, tenkinantys nelygybes $n+1 \leqslant x,\ y,\ z \leqslant 2n$, gali būti trikampio kraštinių ilgiai. Todėl trikampių su tokiomis kraštinėmis skaičius lygus $\overline{C}_n^3 = C_{n+2}^3$. Norėdami sužinoti lygiašonių trikampių skaičių, pastebėsime, kad su pasirinktuoju pagrindu yra n lygiašonių trikampių. Vadinasi, iš viso turime n^2 lygiašonių trikampių. Lygiakraščių trikampių skaičius lygus n.

267. Reikia nagrinėti natūrinių skaičių trejetus x, y, z, tenkinančius tokias sąlygas: $x \leqslant y \leqslant z \leqslant 2n$, $x+y>z$. Sakykime, kad $x=p$. Tada y gali įgyti reikšmes nuo p iki $2n$. Kai y kinta nuo p iki $2n-p+1$, kiekvieną y reikšmę atitinka p kintamojo z reikšmių, tenkinančių nelygybes $y \leqslant z < y+p$, $z \leqslant 2n$. Kai y kinta nuo $2n-p+2$ iki $2n$, tai atitinkamųjų z reikšmių skaičius lygus $2n-y+1$. Vadinasi, kai $x=p$, gauname

$$2p(n-p+1) + \sum_{y=2n-p+2}^{2n} (2n-y+1) = 2pn - \frac{3}{2}p^2 + \frac{3}{2}p$$

tokių porų (y, z), kad skaičiai x, y ir z tenkina nurodytąsias sąlygas. Iš to matyti, kad trikampių, kurių kraštinių ilgiai x, y ir z tenkina nelygybes $1 \leqslant x \leqslant n$ ir $1 \leqslant y,\ z \leqslant 2n$, skaičius lygus

$$\sum_{p=1}^{n} \left(2pn - \frac{3}{2}p^2 + \frac{3}{2}p\right) = \frac{n}{2}(n+1)^2.$$

Išsprendę 266 uždavinį, sužinojome, kad egzistuoja C_{n+2}^3 trikampių, kurių $x \geqslant n+1$. Todėl iš viso turime

$$\frac{n}{2}(n+1)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

trikampių.

Lygiašonių trikampių su pagrindu $x=2k$ skaičius lygus $2n-k$, o su pagrindu $x=2k+1$ – irgi $2n-k$. Todėl visų lygiašonių trikampių skaičius lygus

$$\sum_{k=1}^{n} (2n-k) + \sum_{k=0}^{n-1} (2n-k) = 3n^2.$$

Atmetę lygiašonius trikampius, gauname

$$\frac{n(n+1)(4n+5)}{6} - 3n^2 = \frac{n(n-1)(4n-5)}{6}$$

įvairiakraščių trikampių.

268. Šis uždavinys sprendžiamas, kaip ir 267 uždavinys. Skaičius trikampių su reikšme $x=p \leqslant n-1$ lygus $2np - \frac{3}{2}p^2 + \frac{p}{2}$, o iš viso trikampių, kai $x \leqslant n-1$, turime

$$\sum_{p=1}^{n-1} \left(2np - \frac{3}{2}p^2 + \frac{p}{2}\right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{2}.$$

Skaičius tokių trikampių, kurių $x \geqslant n$, lygus C_{n+2}^3, todėl iš viso gauname

$$\frac{n(n+1)(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

trikampių. Lygiašonių trikampių skaičius lygus

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2n-k-1)+\sum_{k=0}^{n-1}(2n-k-1)=3n^2-3n+1,$$

o įvairiakraščių –

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}-3n^2+3n-1=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3).$$

269. Kadangi imame n susikirtimo taškų ir nėra trijų taškų, priklausančių vienai tiesei, tai kiekvienoje tiesėje turi būti du ir tik du pasirinktosios grupės taškai. Todėl, norint sudaryti tokią grupę, reikia sunumeruoti duotąsias tieses ir pirmojoje pasirinkti tašką, kuriame ją kerta antroji tiesė, antrojoje – tašką, kuriame ją kerta trečioji, ..., n-tojoje tiesėje – tašką, kuriame ją kerta pirmoji tiesė. Gausime pageidaujamo tipo grupę. Aprašytuoju metodu galima sudaryti visas to tipo grupes. Kadangi grupės taškus perstatinėdami cikliškai ir keisdami apėjimo kryptį, naujų grupių negauname, tai grupių skaičius lygus $\frac{P_n}{2n}=\frac{1}{2}(n-1)!$.

270. Pasirinkti r viršūnių, išdėstytų tam tikra eile, yra A_n^r būdų. Kadangi perstatant viršūnes cikliškai ir keičiant apėjimo kryptį, naujos laužtės negauname, tai turime $\frac{1}{2r}A_n^r$ laužčių.

271. Abiejose tiesėse pasirinkime po du taškus. Per tuos taškus nubrėžę tieses, gausime du susikirtimo taškus (trapecijos įstrižainių susikirtimo tašką ir šoninių kraštinių susikirtimo tašką). Kadangi pirmojoje tiesėje galima sudaryti C_n^2 taškų porų, o antrojoje – C_m^2 porų, tai susikirtimo taškų skaičius lygus $2C_n^2C_m^2$.

272. n taškų nustato C_n^3 apskritimų. Per duotą tašką eina C_{n-1}^2 apskritimų, o per du duotus taškus – C_{n-2}^1 apskritimų. Todėl tiesė, nubrėžta per du duotuosius taškus, su apskritimais turi ne daugiau kaip $2C_{n-2}^3+(2C_{n-1}^2-C_{n-2}^1)+2$ susikirtimo taškų. Kadangi per n taškų nubrėžiama C_n^2 tiesių, tai gauname ne daugiau kaip

$$C_n^2(2C_{n-2}^3+2C_{n-1}^2-C_{n-2}^1+2)$$

susikirtimo taškų.

273. Kiekvieną susikirtimo tiesę apibrėžia dvi plokštumos, o kiekvieną plokštumą – trys duotieji taškai. Tieses galima suskirstyti į klases, atsižvelgiant į tai, kiek taškų, apibrėžiančių pirmąją plokštumą, priklauso taškų trejetui, apibrėžiančiam antrąją plokštumą. Yra $\frac{1}{2}C_n^3C_{n-3}^3$ atvejų, kai tie trejetai neturi bendrų taškų (iš n taškų pasirenkame 3 taškus, o paskui iš $n-3$ taškų – kitus 3 taškus; pasirinkimo eilė neturi reikšmės). Kai trejetai turi tik vieną bendrą tašką, pasirinkimo variantų skaičius lygus $\frac{3}{2}C_n^3C_{n-3}^2$; kai du taškai priklauso abiem trejetams, turime $\frac{3}{2}C_n^3C_{n-3}^1$ variantų. Iš viso gauname

$$\frac{1}{2}C_n^3(C_{n-3}^3+3C_{n-3}^2+3C_{n-3}^1)=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2+2)}{72}$$

tiesių. Iš jų

$$\frac{1}{2}C_n^3C_{n-3}^3=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{72}$$

tiesių neina per duotuosius taškus.

274. Keturkampio kraštinių ilgius žymėkime raidėmis a, b, c, d. Nesiaurinant klausimo, galima tarti, kad a – mažiausioji kraštinė, c – jai priešingoji kraštinė ir kad $b<d$. Tada $a<b<d$ ir $a<c$. Be to, keturkampis apibrėžtas apie apskritimą, todėl $a+c=$ $=b+d$. Iš čia gauname $a+c>2b$. Taigi, pasirinkus a ir b reikšmes, ilgis c gali kisti nuo $2b-a+1$ iki n; be to, a ir b reikšmės turi tenkinti nelygybę $2b-a\leqslant n-1$.

Taigi įrodėme, kad $b\leqslant\frac{a+n-1}{2}$ ir kad $2b-a+1\leqslant c\leqslant n$. Skaičių $E\left(\frac{a+n-1}{2}\right)$ pažymėkime raide s. Tada, fiksavus a reikšmę, galima sudaryti

$$\sum_{b=a+1}^{s}(n+a-2b)=(s-a)(n-s-1)$$

keturkampių.

Sakykime, kad n – lyginis skaičius: $n=2m$. Tada, imdami nelygines a reikšmes: $a=2k-1$, gauname $s=\left[\frac{n+a-1}{2}\right]=m+k-1$. Todėl šiuo atveju yra $(m-k)^2$ keturkampių. Jei a reikšmės – lyginiai skaičiai: $a=2k$, tai $s=\left[\frac{n+a-1}{2}\right]=m+k-1$. Šiuo atveju yra $(m-k-1)(m-k)$ keturkampių. Sumuodami a atžvilgiu, įsitikiname, kad visų keturkampių skaičius lygus

$$\sum_{k=1}^{m}(m-k)^2+\sum_{k=1}^{m}(m-k)(m-k-1)=\frac{m(m-1)(4m-5)}{6}=\frac{n(n-2)(2n-5)}{24}.$$

Atvejis, kai n – nelyginis skaičius, nagrinėjamas analogiškai.

Jei keturkampiai gali turėti kongruenčių kraštinių, tai a, b, c ir d turi tenkinti nelygybes $a\leqslant b\leqslant d\leqslant n$, $a\leqslant c$ ir lygybę $a+c=b+d$, iš kurių matyti, kad $b\leqslant\frac{a+n}{2}$ ir $2b-$ $-a\leqslant c\leqslant n$. Skaičių $E\left(\frac{a+n}{2}\right)$ pažymėjus raide s, keturkampių su duota a reikšme skaičius lygus $(n-s+1)(s-a+1)$.

Kai n – lyginis skaičius, gauname $\frac{n(n+2)(2n+5)}{24}$ keturkampių, o kai nelyginis, $\frac{(n+1)(2n^2+7n+3)}{24}$ keturkampių.

275. Nubrėžtųjų apskritimų skaičius lygus C_n^3. Per nurodytą tašką eina C_{n-1}^2 apskritimų, o per du nurodytus taškus – C_{n-2}^1 apskritimų. Pasirinkime vieną apskritimą, nubrėžtą per taškus A, B ir C. Turime $C_n^3-3C_{n-1}^2+3C_{n-2}^1-1$ apskritimų, kurie neina nė per vieną iš tų taškų. Pasirinktasis apskritimas kerta kiekvieną šių apskritimų dviejuose taškuose. Be to, turime $3(C_{n-1}^2-2C_{n-2}^1+1)$ apskritimų, kurie eina per vieną iš taškų A, B, C, bet neina per kitus du taškus. Tų apskritimų vienas susikirtimo taškas nesutampa su taškais A, B ir C. Kiti apskritimai su pasirinktuoju susikerta dviejuose iš taškų A, B, C. Vadinasi, pasirinktajame apskritime yra

$$2(C_n^3-3C_{n-1}^2+3C_{n-2}^1-1)+3(C_{n-1}^2-2C_{n-2}^1+1)=\frac{(n-3)(n-4)(2n-1)}{6}$$

susikirtimo taškų, nesutampančių su A, B, C. Iš viso gauname

$$\frac{1}{2}C_n^3\frac{(n-3)(n-4)(2n-1)}{6}=\frac{5(2n-1)}{3}C_n^5$$

susikirtimo taškų, nesutampančių su duotaisiais taškais. Pridėję tuos n taškų, sužinome, kad didžiausias susikirtimo taškų skaičius lygus

$$\frac{5(2n-1)}{3}C_n^5+n.$$

276. Jei prie k anksčiau išvestųjų plokštumų pridėsime $(k+1)$-ąją plokštumą, tai gausime $2k$ naujų dalių, o $2+2+4+6+\ldots+2(n-1)=n^2-n+2$.

277. Dažant 6 sienas šešiomis skirtingomis spalvomis, gali būti $6!=720$ dažymo variantų. Tuos variantus suskirstome į klases, vienai klasei priskirdami tuos dažymo variantus, kuriuos galima sutapdinti vieną su kitu, sukinėjant kubą. Kubą sutapdinti su juo pačiu galima 24 būdais (6 būdais pasirenkama siena, kuri turi sutapti su fiksuota kubo siena; po to dar lieka 4 kubo posūkiai, kuriais pasirinktoji siena sutapdinama su ja pačia). Todėl kiekvienai klasei priklauso po 24 dažymo variantus, o geometriškai skirtingų dažymo variantų skaičius lygus $\frac{720}{24}=30$.

278. Šis uždavinys sprendžiamas visiškai panašiai, kaip 277 uždavinys. Dažymo variantų skaičius lygus $\frac{4!}{12}=2$.

279. $\frac{8!}{24}=1680$ variantų.

280. Dažant dodekaedrą, $\frac{12!}{60}$ variantų; dažant ikosaedrą, $\frac{20!}{60}$ variantų.

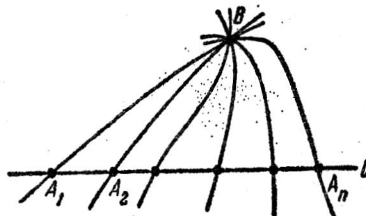
282. Reikia sužinoti, kiek natūrinių skaičių trejetų x, y, z tenkina tokias sąlygas: $x\leqslant y\leqslant z$, $x+y+z=40$, $x+y>z$. Iš tų sąlygų matyti, kad z gali įgyti tik reikšmes, kurios tenkina nelygybes $14\leqslant z\leqslant 19$. Jei $z=19$, tai $x+y=21$ ir, be to, $x\leqslant y\leqslant 19$. Todėl $11\leqslant y\leqslant 19$. Vadinasi, kai $z=19$, gauname 9 trikampius. Panašiai įsitikiname, kad skaičius trikampių, kurių $z=18$, 17, 16, 15, 14, atitinkamai lygus 8, 6, 5, 3, 2. Todėl iš viso gauname 33 trikampius. Panašiai galima sužinoti, kad trikampių su perimetru 43 skaičius lygus 44.

283. Imkime trikampį, kurio perimetras lygus $4n$. Sakykime, kad jo kraštinių ilgiai lygūs x, y ir z. Prie tų skaičių pridėję po 1, gauname skaičius $x+1$, $y+1$, $z+1$, kurie yra trikampio su perimetru $4n+3$ kraštinių ilgiai. Tačiau yra trikampių, kurių šiuo metodu negauname; tai trikampiai, kurių vienos kraštinės ilgis lygus $2n+1$, būtent $(1, 2n+1, 2n+1)$, $(2, 2n, 2n+1)$, ..., $(n+1, n+1, 2n+1)$.

284. Sakykime, $N=12n$. Reikia sužinoti, kiek natūrinių skaičių trejetų x, y, z tenkina tokias sąlygas: $x\leqslant y\leqslant z$, $x+y+z=12n$, $x+y>z$. Iš tų sąlygų matyti, kad $4n\leqslant z\leqslant 6n-1$. Be to, jei $z=2k$, tai $x+y=12n-2k$, o ta lygtis turi $3k-6n+1$ natūrinių sprendinių, tenkinančių sąlygą $x\leqslant y\leqslant 2k$. Jei $z=2k+1$, tai sprendinių skaičius lygus $3k-6n+2$. Todėl visų trikampių skaičius lygus

$$\sum_{k=2n}^{3n-1}(3k-6n+1)+\sum_{k=2n}^{3n-1}(3k-6n+2)=3n^2.$$

Kiti atvejai nagrinėjami analogiškai. Pereinant nuo N prie $N+3$, galima samprotauti taip, kaip samprotauta, sprendžiant 283 uždavinį.

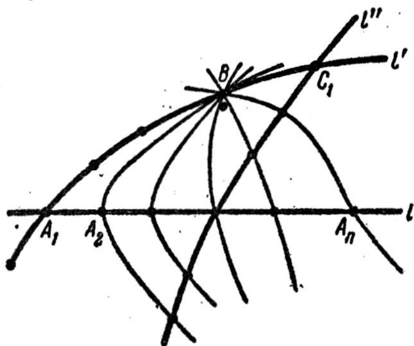


37 pav.

285. Įrodysime, kad pro kiekvieną stotelę eina lygiai n maršrutų. Sakykime, kad l — koks nors maršrutas, o B — stotelė, esanti šalia to maršruto (37 pav.). Iš pirmos sąlygos matyti, kad iš stotelės B galima atitinkamais maršrutais patekti į kiekvieną maršruto l stotelę A_1, ..., A_n. Be to, iš antros sąlygos aišku, kad kiekvienas maršrutas, einąs pro stotelę B, eina pro kokią nors maršruto l stotelę (priešingu atveju iš to maršruto negalėtume persėsti į maršrutą l), bet tik pro vieną stotelę (priešingu atveju iš to marš-

ruto į maršrutą l galėtume persėsti dviejose stotelėse). Be to, du pro B einantys maršrutai negali eiti pro vieną ir tą pačią maršruto l stotelę (priešingu atveju iš vieno tų maršrutų galėtume persėsti į antrąjį dviejose stotelėse — stotelėje B ir toje maršruto l stotelėje, pro kurią eina abu maršrutai). Iš to darome išvadą, kad pro stotelę B eina tiek maršrutų, kiek stotelių turi maršrutas l, t. y. lygiai n maršrutų.

Reikia dar įrodyti, kad pro kiekvieną maršruto l stotelę $A_1, \ldots, A_n$ irgi eina lygiai n maršrutų. Tam pakanka įsitikinti, kad pro bet kurią iš tų stotelių neina koks nors maršrutas l' (pagal sąlygą maršrutas l' turi n stotelių, o tokiu atveju pro nagrinėjamąją stotelę eina n maršrutų). Kadangi maršrutų skaičius ne mažesnis už du, tai, be l, yra dar bent vienas maršrutas l' (38 pav.), kuris su maršrutu l susikerta vieninteliame taške, pavyzdžiui, A_1. Tada stotelės $A_2, \ldots, A_n$ yra šalia maršruto l', o dėl to pro jas eina po n maršrutų. Sakykime, kad B — dar viena maršruto l' stotelė. Maršrutas, einąs pro B ir A_2, neina per tašką A_1; todėl pro A_1 irgi eina n maršrutų. Vadinasi, pro kiekvieną stotelę eina lygiai n maršrutų.



38 pav.

Kadangi, pasirinkus bet kurią stotelę, galima rasti pro ją neinantį maršrutą, o kiekviename maršrute yra n stotelių, tai pro kiekvieną stotelę eina lygiai n maršrutų. Iš tų maršrutų pasirinkime maršrutą l. Pro kiekvieną to maršruto stotelę eina $n-1$ maršrutų, nesutampančių su l; be to, iš antros sąlygos aišku, kad tie maršrutai nesutampa vienas su kitu (priešingu atveju jie turėtų dvi bendras stoteles) ir kad kiekvienas maršrutas gaunamas šitokiu būdu. Vadinasi, nesutampančių su l maršrutų skaičius lygus $n(n-1)$, o iš viso yra $n(n-1)+1$ maršrutų.

286. Sakykime, kad kokiame nors maršrute l yra n stotelių. Iš 285 uždavinio sprendimo matyti, kad pro bet kurią stotelę, nepriklausančią maršrutui l, eina lygiai n maršrutų. Įrodysime, kad kiekviename maršrute l'', nesutampančiame su l, yra lygiai n stotelių. Iš trečiosios sąlygos matyti, kad maršrute l'' yra ne mažiau kaip trys stotelės; be to, iš antrosios sąlygos aišku, kad tik viena iš tų trijų stotelių yra ir maršruto l stotelė. Todėl maršrutui l'' nepriklauso $n-1$ maršruto l stotelių. Įsitikinsime, kad, be šių stotelių, maršrutui l'' nepriklauso dar nors viena stotelė, nesanti maršrute l. Sakykime, kad A_1 yra viena iš $n-1$ stotelių, priklausančių maršrutui l, bet nepriklausančių maršrutui l'', o C_1 — viena iš maršruto l'' stotelių, nepriklausančių maršrutui l (tokių stotelių yra ne mažiau kaip dvi). Iš pirmosios sąlygos išeina, kad egzistuoja maršrutas l', einąs pro stoteles A_1 ir C_1; tame maršrute, kaip matyti iš trečiosios sąlygos, be stotelių A_1 ir C_1, yra dar nors viena stotelė B_1, kuri nepriklauso nei maršrutui l, nei maršrutui l''. Pro stotelę B_1, kaip paaiškėjo sprendžiant 285 uždavinį, eina n maršrutų. Kiekvienas tų maršrutų susikerta su maršrutu l'' vieninteliame taške. Be to, pro kiekvieną maršruto l'' stotelę eina bent vienas maršrutas, jungiąs tą stotelę su stotele B. Todėl maršruto l'' stotelių skaičius lygus skaičiui maršrutų, einančių pro stotelę B, t. y. lygus n.

Spręsdami 285 uždavinį, įsitikinome, kad tokiu atveju maršrutų skaičius reiškiamas formule $n(n-1)+1$. Kadangi pagal sąlygą tas skaičius lygus 57, tai reikia spręsti lygtį $n^2-n+1=57$. Ją išsprendę, sužinome, kad $n=8$.

287. Galima. Imkime, pavyzdžiui, plokštumoje 10 tiesių, iš kurių nė viena nėra lygiagreti kitai tiesei ir neina per kitų dviejų tiesių susikirtimo tašką. Tas tieses laikysime

autobusų maršrutais, o jų susikirtimo taškus – stotelėmis. Tokiu atveju iš kiekvienos stotelės galima nuvažiuoti į bet kurią kitą stotelę be persėdimo, jei stotelės yra vienoje tiesėje, arba vieną kartą persėdant, jei stotelės yra skirtingose tiesėse. Jei iš tos schemos pašalinsime vieną tiesę, vis tiek bus galima nuvažiuoti iš kiekvienos stotelės į bet kurią kitą stotelę, kelionėje persėdant ne daugiau kaip vieną kartą. Tačiau pašalinus dvi tieses, viena stotelė – pašalintųjų tiesių susikirtimo taškas – visiškai nebebus susieta su likusiais maršrutais: iš tos stotelės nebebus įmanoma nuvažiuoti į jokią kitą stotelę.

288. Rutulys gali liesti bet kurią plokštumą arba iš vienos, arba iš kitos pusės, o duotąjį rutulį – arba iš vidaus, arba iš išorės. Todėl gali būti 16 skirtingų rutulių.

289. Kiekviena tiesė, nubrėžta per tašką A, kerta $2m$ tiesių. Todėl tiesės, einančios per tašką A, duoda $2m^2$ susikirtimo taškų. Visų susikirtimo taškų, nesutampančių su trimis duotaisiais taškais, skaičius lygus $3m^2$.

290. Taškus, priklausančius vienai plokštumai žymėkime $A_1, \ldots, A_m$, o kitus taškus $B_1, \ldots, B_{n-m}$. Kiekviena plokštuma apibrėžiama trimis taškais. Tame taškų trejete gali būti trys, du, vienas arba nė vieno taško iš grupės $A_1, \ldots, A_m$. Atsižvelgdami į tai, apskaičiuojame, kiek bus plokštumų:

$$1+C_m^2 C_{n-m}^1+C_m^1 C_{n-m}^2+C_{n-m}^3.$$

291. Kiekvienoje tiesėje, nubrėžtoje per tašką A, yra $n+p$ susikirtimo taškų, nubrėžtoje per B yra $m+p$ susikirtimo taškų, o per C – $m+n$ susikirtimo taškų. Kadangi per A eina m tiesių, per B – n tiesių, o per C – p tiesių, tai visų susikirtimo taškų skaičius lygus

$$\frac{1}{2}\Big(m(n+p)+n(m+p)+p(m+n)\Big)=mn+mp+np.$$

Iš tų taškų galima sudaryti $C_{mn+mp+np}^3$ trejetų, bet iš jų bus $mC_{n+p}^3+nC_{m+p}^3+pC_{m+n}^3$ trejetų, kurių taškai yra vienoje tiesėje. Todėl trikampių skaičius lygus

$$C_{mn+mp+np}^3-mC_{n+p}^3-nC_{m+p}^3-pC_{m+n}^3.$$

292. Laisvai pasirenkame pirmąją trikampio viršūnę. Tai padaryti yra n būdų. Paskui iš $n-3$ viršūnių, negretimų pasirinktajai viršūnei, reikia pasirinkti dar dvi viršūnes, negretimas viena kitai. Tai padaryti yra C_{n-4}^2 būdų (žr. p. 69). Kadangi bet kurią trikampio viršūnę galima laikyti pirmąja, tai gauname $\frac{n}{3}C_{n-4}^2=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$ trikampių.

293. Visus trikampius suskirstome į dvi klases, pirmajai klasei priskirdami trikampius, kurių visos viršūnės yra skirtingose tiesėse, o antrajai – trikampius, kurių dvi viršūnės priklauso vienai tiesei. Pirmosios klasės trikampių skaičius lygus $p^3 C_n^3$: pasirenkame tris tieses, kuriose yra viršūnės (C_n^3 variantų), o paskui – kiekvienoje tiesėje po vieną tašką iš p galimų taškų (p^3 variantų). Antrosios klasės trikampių skaičius lygus $\frac{1}{2}p^2(p-1)n(n-1)$: (pasirenkame tiesę, kurioje yra dvi viršūnės (n variantų), paskui du tos tiesės taškus (C_p^2 variantų), po to imame tiesę, kurioje yra trečioji viršūnė ($n-1$) variantų, ir pasirenkame tą viršūnę (p variantų). Visų galimų trikampių skaičius lygus

$$p^3 C_n^3+\frac{1}{2}p^2(p-1)n(n-1)=\frac{n(n-1)p^2(pn+p-3)}{6}.$$

294. Kiekvienas vidinis įstrižainių susikirtimo taškas vienareikšmiškai apibrėžiamas keturiomis n-kampio viršūnėmis – susikertančių įstrižainių galais. Todėl jų skaičius lygus C_n^4. Apskaičiuosime, kiek įstrižainių susikirtimo taškų yra iš viso. Iš kiekvienos n-kampio viršūnės išeina $n-3$ įstrižainių, o iš viso turime $\frac{n(n-3)}{2}$ įstrižainių. Įstrižainė AB susikerta su visomis įstrižainėmis, jungiančiomis viršūnes, nesutampančias su A ir B. Todėl turime

$$\frac{n(n-3)}{2}-2(n-3)+1=\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1$$

taškų, kuriuose įstrižainė AB kerta kitas įstrižaines. Kadangi yra $\frac{n(n-3)}{2}$ įstrižainių, o kiekvienas susikirtimo taškas skaitomas du kartus, tai iš viso gaunamе

$$\frac{n(n-3)\big((n-3)(n-4)+2\big)}{8}$$

įstrižainių susikirtimo taškų. Iš to skaičiaus atėmę vidinių susikirtimo taškų skaičių, sužinome išorinių susikirtimo taškų skaičių. Jis lygus

$$\frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}.$$

295. Kiekvienas r-kampis apibrėžiamas, pasirenkant kokia nors eile r taškų iš n turimųjų taškų. Ciklinis tų taškų perstatinėjimas ir apėjimo krypties keitimas to r-kampio nekeičia. Todėl r-kampių skaičius lygus $\frac{1}{2r}A_n^r$, o visų daugiakampių skaičius $\sum_{r=3}^{n}\frac{1}{2r}A_n^r$. Iškiliųjų daugiakampių skaičių lygus $\sum_{r=3}^{n}C_n^r$.

296. Lygiagrečiosios tiesės dalija plokštumą į $m+1$ juostų. Kiekviena nauja tiesė prideda tiek gabalų, į kiek dalių ją dalija anksčiau nubrėžtosios tiesės. Kadangi nubrėžiame dar n tiesių, tai plokštumos dalių skaičius lygus

$$(m+1)+(m+2)+\ldots+(m+n)=\frac{n(2m+n+1)}{2}.$$

297. Apskritimus suskirstykime į klases, atsižvelgdami į tai, kiek duotųjų taškų, esančių duotajame apskritime, priklauso nagrinėjamam apskritimui. Vienam apskritimui (būtent, duotajam) priklauso visi 5 taškai, $C_5^2C_6^1$ apskritimų priklauso du taškai, $C_5^1C_6^2$ apskritimų — vienas taškas, o C_6^3 apskritimų nepriklauso nė vienas taškas. Iš viso gaunamе $1+C_5^2C_6^1+C_5^1C_6^2+C_6^3=156$ apskritimus.

298. Kiekvieną tiesių trejetą atitinka 4 jas liečiantys apskritimai. Todėl iš viso galima nubrėžti $4C_{10}^3=480$ apskritimų.

299. Pasirinksime s iš eilės einančių n-kampio viršūnių $A_1, \ldots, A_s$ ir visus k-kampius, tenkinančius uždavinyje nurodytas sąlygas, suskirstysime į dvi klases. Pirmajai klasei priskirsime tuos k-kampius, kurių viena viršūnė sutampa su kokia nors pasirinktąja viršūne, o antrajai klasei — visus kitus k-kampius. Pirmosios klasės k-kampius savo ruožtu suskirstysime į s poklasių, atsižvelgdami į tai, kuri viršūnė A_m $(1\leqslant m\leqslant s)$ priklauso k-kampiui (savaime aišku, kad tie poklasiai neturi bendrų elementų).

Sužinosime, kiek yra tokių k-kampių, kurių viena viršūnė sutampa su A_m. Tuo tikslu pašalinsime viršūnę A_m ir s po jos einančių laikrodžio rodyklės kryptimi viršūnių (jos nėra k-kampio viršūnės). Iš likusių $n-ks-1$ viršūnių pasirinksime $k-1$ viršūnių, po kiekvienos pasirinktosios viršūnės praleisdami ne mažiau kaip s viršūnių. Tai padaryti yra C_{n-ks-1}^{k-1} būdų (žr. 250 uždavinį). Todėl k-kampių su viršūne A_m skaičius lygus C_{n-ks-1}^{k-1}, o visų pirmosios klasės k-kampių skaičius lygus sC_{n-ks-1}^{k-1}.

Apskaičiuosime, kiek k-kampių priklauso antrajai klasei. Tuo tikslu „perpjausime" n-kampį tarp viršūnių A_s ir A_{s+1}. Reikia pasirinkti k viršūnių taip, kad po kiekvienos pasirinktosios viršūnės būtų bent s paliktų viršūnių (tokiu atveju nė viena iš viršūnių $A_1, \ldots, A_s$ nebus pasirinkta). Tai padaryti yra C_{n-ks}^k būdų. Vadinasi, visų k-kampių, tenkinančių nurodytąsias sąlygas, skaičius lygus

$$sC_{n-ks-1}^{k-1}+C_{n-ks}^{k}=\frac{n}{n-ks}\,C_{n-ks}^{k}.$$

300. Kiekvieną lygiagretainį apibrėžia dvi lygiagrečių tiesių poros. Todėl turime $(C_{r+2}^2)^2$ lygiagretainių.

301. Braižysime paeiliui įstrižaines iš viršūnių $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Kiekviena nauja įstrižainė duoda tiek naujų dalių, į kiek atkarpų ją padalija anksčiau nubrėžtosios įstrižainės, t. y. viena dalimi daugiau už jos susikirtimo su anksčiau nubrėžtomis įstrižainėmis taškų skaičių. Kadangi kiekvienas susikirtimo taškas gaunamas tik vieną kartą, tai visų naujų dalių skaičius lygus susikirtimo taškų skaičiui, sudėtam su įstrižainių skaičiumi. Pradžioje turėjome vieną dalį, todėl visų dalių skaičius lygus

$$1+\frac{n(n-3)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=\frac{n(n-3)(n^2-3n+14)}{24}+1$$

(žr. **294** uždavinį).

302. Tarkime, kad n – lyginis skaičius: $n=2k$. Tada skaičių n galima išreikšti dviejų dėmenų suma šitaip:

$$n=1+(2k-1)=2+(2k-2)=\ldots=k+k.$$

Kortą su skaičiumi 1 galima ištraukti tik vienu būdu, su skaičiumi 2 – dviem būdais ir t. t. Dvi kortas su skaičiumi $k>1$ ištraukti yra C_k^2 būdų. Todėl iš viso turime

$$1(2k-1)+2(2k-2)+\ldots+(k-1)(k+1)+\frac{k(k-1)}{2}=$$

$$=\sum_{s=1}^{k-1} s(2k-s)+\frac{k(k-1)}{2}=\frac{2k(k^2-1)}{3}=\frac{n(n^2-4)}{12}$$

būdų sudaryti sumą $n=2k$. Jei n – nelyginis skaičius: $n=2k-1$, tai

$$n=1+(2k-2)=2+(2k-3)=\ldots=(k-1)+k,$$

o variantų skaičius lygus

$$\sum_{s=1}^{k-1} s(2k-s-1)=\frac{k(k-1)(2k-1)}{3}=\frac{n(n^2-1)}{12}.$$

303. Suskirstykime ėminius į klases, atsižvelgdami į tai, kiek vienodų daiktų yra ėminyje. Ėminių, kuriuose yra k vienodų daiktų, skaičius lygus C_{2n+1}^{n-k}. Todėl visų ėminių skaičius lygus

$$C_{2n+1}^{n}+C_{2n+1}^{n-1}+\ldots+C_{2n+1}^{0}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k}=2^{2n}.$$

304. Jei pirmasis progresijos narys lygus a, o jos skirtumas d, tai trečiasis narys lygus $a+2d$. Sąlygoje pasakyta, kad $a+2d\leqslant 2n$. Fiksuotą d reikšmę atitinka $2n-2d$ tos nelygybės sprendinių. Iš viso gauname

$$(2n-2)+(2n-4)+\ldots+2=n(n-1)$$

sprendinių. Kadangi kiekvieną gautąją progresiją galima laikyti ir didėjančia, ir mažėjančia, tai gauname $2n(n-1)$ progresijų. Kai duotoji skaičių seka yra $1, 2, 3, \ldots, 2n+1$, progresijų skaičius lygus $2n^2$.

305. Pateiktąjį teiginį įrodinėsime indukcijos metodu pagal kreivių skaičių s. Kai $s=1$, teiginys akivaizdžiai teisingas: susikirtimo taškų nėra, sričių skaičius lygus 1. Sakykime, kad teiginys jau įrodytas, kai kreivių skaičius lygus s. Imkime s kreivių sistemą, turinčią n_r susikirtimo taškų, kurių kartotinumas lygus r, $r=2, 3, \ldots$ (taško kartotinumas lygus r, kai jame susikerta r kreivių). Tokiu atveju kreivių lankai apriboja $1+n_2+\ldots+rn_{r+1}+\ldots$ uždarų sričių. Nubrėžkime $(s+1)$-ąją kreivę ir tarkime, kad joje, susikirtus su anksčiau nubrėžtomis kreivėmis, susidaro k_r susikirtimo taškų, kurių kartotinumas lygus r, $r=2, 3, \ldots$ Iš viso toje kreivėje yra $k_2+k_3+\ldots+k_{r+1}+\ldots$ susikirtimo

taškų. Tie taškai $(s+1)$-ąją kreivę padalija į $k_2+k_3+\ldots+k_{r+1}+\ldots$ dalių. Kiekvieną kreivės dalį atitinka viena nauja sritis, todėl dabar sričių skaičius lygus

$$(1+n_2+\ldots+rn_{r+1}+\ldots)+(k_2+k_3+\ldots+k_{r+1}+\ldots). \qquad (*)$$

Jei naująją kreivę nubrėžėme per susikirtimo tašką, kurio kartotinumas buvo r, tai to taško kartotinumas pasidarė lygus $r+1$. Susikirtimo taškų, kurių kartotinumas lygus r, skaičių naujojoje kreivių sistemoje žymėkime n'_r. Aišku, kad $n'_{r+1}=n_{r+1}-k_{r+2}+$ $+k_{r+1}$ (iš n_{r+1} taškų, turėjusių kartotinumą $r+1$, reikia atimti k_{r+2} taškų, kurių buvęs kartotinumas $r+1$ padidėjo vienetu, ir pridėti k_{r+1} taškų, kurių buvęs kartotinumas r padidėjo taip pat vienetu). Tačiau tada

$$1+n'_2+2n'_3+\ldots+rn'_{r+1}+\ldots=1+(n_2-k_3+k_2)+2(n_3-k_4+k_3)+\ldots+$$
$$+r(n_{r+1}-k_{r+2}+k_{r+1})+\ldots=(1+n_2+2n_3+\ldots+rn_{r+1}+\ldots)+$$
$$+(k_2+k_3+\ldots+k_{r+1}+\ldots).$$

Vadinasi, įrodėme, kad suma $1+n'_2+2n'_3+\ldots+rn'_{r+1}+\ldots$ yra lygi sričių skaičiui naujoje kreivių sistemoje (žr. formulę $(*)$). Remdamiesi matematinės indukcijos aksioma, darome išvadą, kad teiginys yra teisingas, turint bet kokį kreivių skaičių.

306. Pirmojo pluošto tiesės padalija plokštumą į $2m$ dalių. Pirmoji antrojo pluošto tiesė kerta visas pirmojo pluošto tieses ir sudaro $m+1$ naujų dalių. Visos kitos antrojo pluošto tiesės turi $m+1$ susikirtimo taškų su anksčiau nubrėžtomis tiesėmis*. Todėl iš viso turime

$$2m+(m+1)+(n-1)(m+2)=nm+2n+2m-1$$

dalių.

307. Negalima, nes priešingu atveju sujungimų skaičius būtų lygus trupmeniniam skaičiui $\frac{77\cdot 15}{2}$.

308. Koeficientų suma lygi reiškinio reikšmei, kai $x=y=z=1$. Parašę tas reikšmes, įsitikiname, kad suma lygi -1.

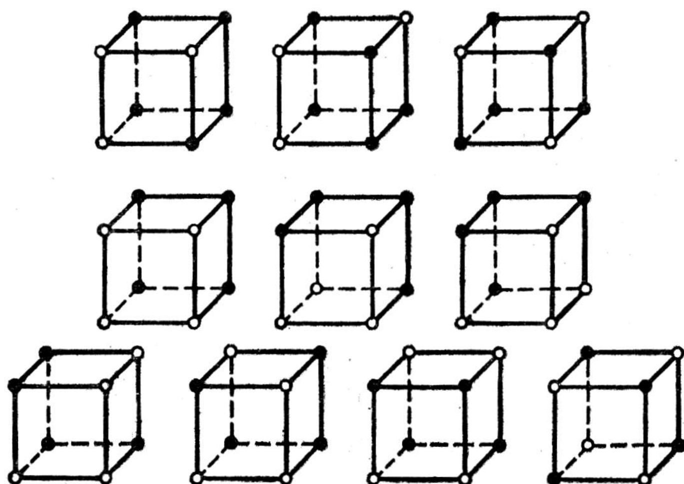
309. Didžiausią ėminį, kuriame nėra 15 vienodų rutuliukų sudaro 74 rutuliukai (10 baltų, 10 juodų, 12 geltonų ir po 14 raudonų, žalių ir mėlynų). Jei paimsime 75 rutuliukus, tai ėminyje tikrai bus 15 vienaspalvių rutuliukų.

310. Dažymo variantus suskirstysime į klases, atsižvelgdami į tai, kiek sienų nudažyta baltais dažais. Yra vienintelis dažymo variantas, kai nėra nė vienos baltos sienos, ir vienintelis variantas, kai viena siena dažoma baltai. Kai dvi sienos dažomos baltai, yra du variantai: arba baltosios sienos turi bendrą briauną, arba tos sienos yra priešingosios kubo sienos. Kai trys sienos yra baltos, irgi turime du variantus: arba dvi baltosios sienos yra priešingos kubo sienos, arba baltosios sienos sudaro trisienį kampą. Kai baltųjų sienų skaičius lygus 4, 5 ir 6, samprotaujame panašiai, tik baltąją spalvą pakeičiame juodąja, o juodąją — baltąja. Iš viso gauname $1+1+2+2+2+1+1=10$ dažymo variantų.

311. Jei dažomos kubo viršūnės, tai yra 1 dažymo variantas be baltų viršūnių, 1 variantas su viena balta viršūne, 3 variantai su dviem baltomis viršūnėmis (baltosios viršūnės yra arba briaunos galai, arba sienos įstrižainės galai, arba kubo įstrižainės galai), 3 variantai su trimis baltomis viršūnėmis (arba visos trys viršūnės yra vienoje sienoje, arba dvi viršūnės yra vienoje briaunoje, o trečioji — sienos įstrižainėje, nubrėžtoje iš vienos tų viršūnių, arba trys viršūnės sudaro tris poras — sienų įstrižainių galus; žr. 39 pav.). Nudažyti keturias viršūnes balta spalva galima 7 būdais: 1) visos keturios viršūnės priklauso vienai sienai; 2) trys viršūnės A, B ir C priklauso vienai sienai, o ketvirtoji — vienai briaunai su A arba 3) vienai briaunai su B, arba 4) vienai briaunai su C, arba 5) ketvirtoji viršūnė yra diametraliai priešinga viršūnei B; 6) dvi viršūnės priklauso vienai briaunai, o kitos dvi — diametraliai priešingai briaunai; 7) visų briaunų galai yra skirtingos spalvos. Kai baltųjų viršūnių skaičius lygus 5,6, 7 ir 8, nagrinėjame, kiek bus

---

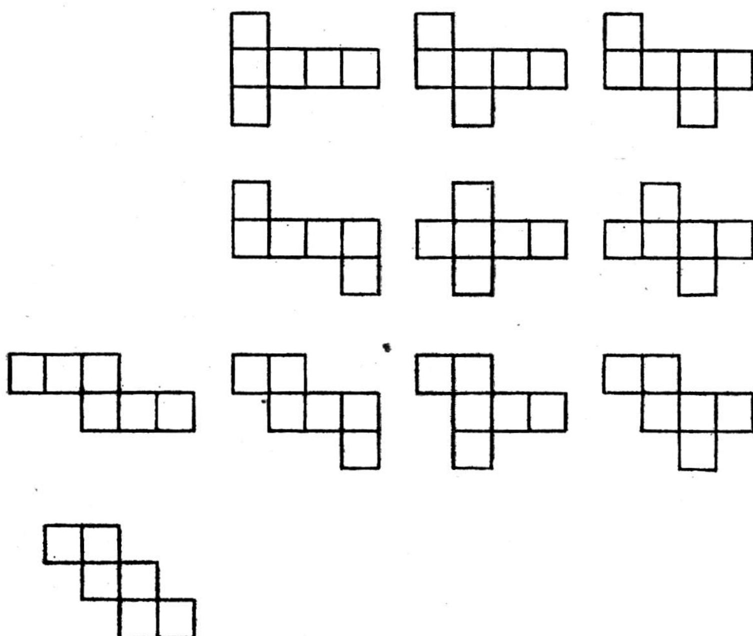
* Prisideda susikirtimo taškas *B. Vertėjas*



39 pav.

kubų, kurių juodųjų viršūnių skaičius lygus 3, 2, 1 ir 0. Iš viso gauname $1+1+3+3+7+$ $+3+3+1+1=23$ nudažymo variantus.

312. Kubas turi 11 išklotinių (40 pav.). Šeši pirmieji sprendiniai yra tos išklotinės, kuriose keturios kubo sienos sudaro vieną išklotinės juostą. Keturios tolesnės išklotinės būdingos tuo, kad vienoje juostoje yra trys sienos, bet nėra keturių sienų. Pagaliau paskutiniame sprendinyje nėra juostos iš trijų sienų.



40 pav.

313. Yra tik 4 tokio nudažymo variantai. Su to teiginio įrodymu skaitytojas gali susipažinti iš G. Šteingauzo knygos „Šimtas uždavinių“ (40 uždavinys)*.

314. Žr. minėtąją G. Šteingauzo knygą, 44 uždavinį.

315. Pirmiausia įrodysime, kad po 2^n laiko vienetų lieka tik dvi dalelės: viena taške su koordinate 2^n, kita – taške su koordinate -2^n. Kai $n=1$, teiginys savaime aiškus. Sakykime, kad jis įrodytas, kai $n=k$. Per 2^k-1 tolesnių etapų vienos dalelės skeveldros neveikia kitos dalelės skeveldrų. Todėl pagal indukcijos prielaidą, po 2^k etapų iš kiekvienos dalelės lieka tik po dvi daleles, nutolusias 2^k vienetų atstumu į kairę ir į dešinę nuo taškų 2^k ir -2^k. Kitaip sakant, viena dalelė bus taške 2^{k+1}, dvi – taške 0 ir viena taške -2^{k+1}. Kadangi dalelės taške 0 pasinaikins, tai liks tik dvi dalelės. Teiginys įrodytas.

Vadinasi, po 128-ojo etapo liks dvi dalelės taškuose su koordinatėmis 128 ir -128. Todėl po 129-ojo etapo gausime keturias daleles taškuose 129, 127, -127 ir -129.

Jei $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_s}$ ir $k_1>k_2>\ldots>k_s$, tai gausime 2^s dalelių, kurių koordinatės apskaičiuojamos iš reiškinio $\pm 2^{k_1}\pm 2^{k_2}\pm\ldots\pm 2^{k_s}$ (galima bet kokia ženklų kombinacija). Tą teiginį lengva įrodyti indukcijos pagal s metodu. Kai $s=1$, teiginį jau įrodėme. Sakykime, kad jis įrodytas, kai $s<m$, o $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_m}$. Tokiu atveju po $(n-2^{k_m})$-ojo etapo turime 2^{m-1} dalelių, išdėstytų taškuose su koordinatėmis $\pm 2^{k_1}\pm 2^{k_2}\pm\ldots\pm$ $\pm 2^{k_{m-1}}$. Atstumas tarp gretimųjų dalelių ne mažesnis už $2^{k_{m-1}+1}$. Todėl per $2^{k_{m-1}}-1$ tolesnių etapų dalelės, kilusios iš skirtingų centrų, neveikia viena kitos, o po 2^{k_m} etapų kiekvienas centras duos po dvi daleles, nutolusias jo 2^{k_m} vienetų atstumu. Kitaip sakant, gausime daleles taškuose su koordinatėmis $\pm 2^{k_1}\pm\ldots\pm 2^{k_m}$. Teiginys įrodytas.

316. Dešifruojant žodį, pakanka surasti tuos tarpus tarp ženklų, po kurių stovi raidės, koduojamos dviem ženklais. Tuos tarpus reikia parinkti iš 11 tarpų (yra 13 tarpų, įskaitant tarpus prieš pirmąjį ženklą ir po paskutiniojo ženklo, bet iš sąlygos aišku, kad paskutinį ir priešpaskutinį tarpus galima atmesti). Be to, negalima pasirinkti gretimų tarpų. Jei žodis turi p „dviženklių“ raidžių, tai reikia pasirinkti p tarpų. Tai padaryti yra C_{12-p}^p būdų. Todėl turime

$$C_{12}^0+C_{11}^1+C_{10}^2+C_9^3+C_8^4+C_7^5+C_6^6=233$$

to žodžio perskaitymo variantus.

317. Tokių p-ženklių skaičių, kuriuos rašant nevartojamas skaitmuo 1, yra $8\cdot 9^{p-1}$. Vadinasi, tarp 1 ir 10 000 000 yra

$$8\,(1+9+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6)=4\ 782\ 968$$

skaičiai, kurie parašomi be skaitmens 1. Tai mažiau negu skaičiaus 10^7 pusė.

318. Imkime tris pirmuosius kiekvieno žodžio ženklus. Tie ženklai sudaro ne daugiau kaip $2^3=8$ kombinacijas. Įsitikinsime, kad kiekvieną tų ženklų kombinaciją atitinka ne daugiau kaip du žodžiai. Kitaip sakant, įsitikinsime, kad tuo atveju, kai trys žodžiai turi tris vienodus pirmuosius ženklus, bent du iš jų turi dar du vienodus ženklus. Sudarykime lentelę, kurioje surašyti keturi paskutiniai tų trijų žodžių ženklai. Kiekviename stulpelyje yra bent du vienodi ženklai. Kadangi iš tų trijų žodžių galima sudaryti 3 poras, o stulpelių skaičius lygus keturiems, tai yra du žodžiai, kurių du stulpeliai sutampa. Tai reiškia, kad tuodu žodžiai turi dar du sutampančius ženklus, o iš viso 5 sutampančius ženklus, kas prieštarauja sąlygai.

Vadinasi, kiekvieną pirmųjų trijų ženklų kombinaciją atitinka ne daugiau kaip du žodžiai. Todėl visų tokių žodžių skaičius neviršija 16. Uždavinio sąlygą tenkinantys žodžiai pavaizduoti 41 paveiksle.

319. Kadangi p – pirminis skaičius, tai apskritimo posūkiu atvaizduojami į save tik nudažymai viena spalva. Tokių dažymo variantų skaičius lygus n. Kitus dažymo variantus (jų skaičius lygus n^p-n) suskirstome į klases po p variantų kiekvienoje klasėje; vienos klasės variantai sutampa vienas su kitu, sukant apskritimą. Todėl iš jų gauname

---

* Г. Штейнгауз. Сто задач, Физматгиз, 1959.

$\frac{n^p - n}{p}$ dažymo būdų. Iš viso turime $\frac{n^p - n}{p} + n$ skirtingų variantų. Spręsdami šį uždavinį, įrodėme mažąją Ferma teoremą: jei p – pirminis skaičius, tai, koks bebūtų natūrinis skaičius n, skaičius $n^p - n$ dalijasi iš p.

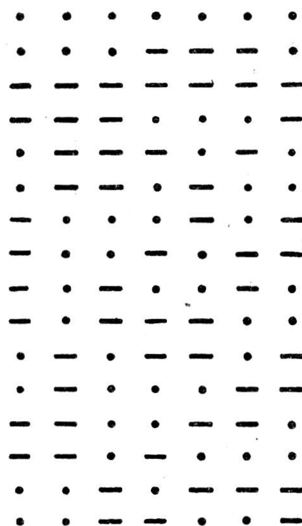
320. Kadangi 1 – mažiausias iš duotųjų skaičių, tai jis turi stovėti kampe, o šalia jo toje pačioje vertikalėje arba horizontalėje turi būti skaičius 2. Todėl skaičiai $1, 2, \ldots, n$ bus arba vienoje vertikalėje, arba vienoje horizontalėje. Mažiausias iš likusiųjų skaičių yra $n+1$. Jis turi stovėti prie 1. Tęsdami šį samprotavimą, įsitikiname, kad visus skaičius reikia surašyti vienareikšmiškai apibrėžtu būdu. Tačiau pradžioje galima parašyti 1 bet kuriame kampe, o skaičius $1, 2, \ldots, n$ surašyti arba vertikalia, arba horizontalia kryptimi. Todėl gauname 8 dėstinius.

321. Jei nebūtų 10 žmonių su vienodu plaukų skaičiumi, tai Maskvoje gyventų ne daugiau kaip 2 700 009 žmonės.

322. Jei pasirinktųjų daiktų skaičius būtų nelyginis, tai likusių daiktų skaičius būtų lyginis.

323. Jei rublis keičiamas 2 kap. ir 5 kap. monetomis, tai keitimo variantų skaičius lygus lygties $2x+5y=100$ sveikų neneigiamų sprendinių skaičiui. Aišku, kad y gali įgyti bet kurią lyginę reikšmę nuo 0 iki 20, t. y. 11 reikšmių. Jei rublis keičiamas 3 kap. ir 5 kap. monetomis, tai reikia spręsti lygtį $3x+5y=100$. Čia y įgyja tik reikšmes 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, t. y. tik 7 reikšmes.

324. Reikia rasti lygties $x+2y+5z=20$ arba nelygybės $2y+5z \leqslant 20$ sveikų neneigiamų sprendinių skaičių. Aišku, kad z gali įgyti tik reikšmes 0, 1, 2, 3 ir 4. Jas atitinkančių y reikšmių skaičius yra toks: 11, 8, 6, 3, 1. Iš viso gauname 29 sprendinius.



41 pav.

325. Kadangi $3=2+1$, $4=2+2$, $6=5+1$, $7=5+2$, $8=5+2+1$, $9=5+2+2$, tai iš turimųjų svarsčių galima sudaryti bet kokį svorį, reiškiamą sveiku skaičiumi, nuo 1 iki 9 mg. Panašiai sudarinėjami svoriai, reiškiami dešimtimis, šimtais ir t. t. miligramų.

326. Paskutiniojo skaitmens vidurkis lygus 2, antrojo ir trečiojo vidurkis lygus 2,5, o pirmojo – 3. Pateiktaisiais skaitmenimis galima parašyti $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$ lyginių skaičių. Todėl jų suma lygi 540 (3 000+250+25+2)=1 769 580.

327. Teiginys savaime aiškus, kai $r=1$: po pirmojo maišymo korta, buvusi p-toje vietoje, kai $p \leqslant n$, patenka į $2p$-tąją vietą, o kai $p>n$, – į $(2p-2n-1)$-ąją vietą. Abiem

atvejais naujosios vietos numeris yra liekana, gauta, dalijant $2p$ iš $2n+1$. Sakykime, kad teiginys jau įrodytas skaičiui r, t. y. po r maišymų korta su numeriu p pateko į vietą su numeriu x, o $2^r p=k(2n+1)+x$. Po $(r+1)$-ojo maišymo ji užims vietą su numeriu y, jei $2x=l(2n+1)+y$, o $l=0$ arba 1. Tačiau tada

$$2^{r+1}p=2k(2n+1)+2x=(2k+l)(2n+1)+y,$$

$y<2^{r+1}p$. Tai reiškia, kad y – liekana, gaunama, skaičių $2^{r+1}p$ dalijant iš $2n+1$. Remdamiesi matematinės indukcijos aksioma, darome išvadą, kad teiginys įrodytas.

328. Tiesiog išplaukia iš **327** uždavinio rezultato.

329. Išplaukia iš **327** uždavinio rezultato.

330. Šiuo atveju liekana, gaunama, dalijant skaičių $2^x p$ iš $2n+1$, lygi p.

331. Iš tikrųjų: po $2n$-tosios kortos eina $2n-1$ kortų su lyginiais numeriais. Jos ir uždedamos ant $2n$-tosios kortos.

332. Teiginys apie aštuntąją kortą išplaukia iš 331 uždavinio rezultato. Kiti atvejai patikrinami tiesiogiai.

333. Po kiekvienos kortos numeriu parašykime numerį, kuris jai tenka po aprašytojo maišymo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	(*)
9	8	10	7	11	6	12	5	13	4	14	3	15	2	16	1	

Iš tos lentelės matyti, kad, pavyzdžiui, pirmuoju maišymu iš 1 gauname 9, antruoju iš 9 gauname 13, paskui iš 13 gauname 15, po to iš 15 gauname 16 ir pagaliau iš 16 gauname 1. Tai galima pavaizduoti ciklu (1, 9, 13, 15, 16, 1). Visas keitinys (*) suskyla į keletą ciklų. Be minėtojo ciklo dar turime ciklus (2, 8, 5, 11, 14, 2), (3, 10, 4, 7, 12, 3) ir ciklą, sudarytą iš vieno skaičiaus 6. Kiekvienas tų ciklų susideda iš vieno arba 5 skirtingų skaičių, todėl po penkių maišymų visos kortos užims pradines padėtis. Kiti atvejai nagrinėjami analogiškai.

334. Pirmoje eilutėje spalvas galima išdėstyti bet kokia eile (24 variantai). Paskui pirmajame stulpelyje bet kokia eile išdėstome tris spalvas, skirtingas nuo kampinio langelio spalvos (6 variantai). Tarkime, kad pasirinkome lentelėje nurodytąsias spalvas. Kadangi eilutėse ir stulpeliuose turi būti visos spalvos, tai antroje eilutėje gali būti tokios spalvų kombinacijos: juoda, balta, mėlyna, raudona; juoda, raudona, mėlyna, balta; juoda, mėlyna, balta, raudona. Pirmuoju atveju vienareikšmiškai nustatomos antrojo stulpelio spalvos, ir lieka du paskutinių keturių langelių dažymo variantai. Iš kitų dviejų antrosios eilutės spalvų kombinacijų irgi gauname po du paskutinių langelių dažymo variantus. Iš viso gauname $4! \cdot 3! \cdot 3 \cdot 2=864$ spalvų išdėstymo variantus.

b	j	r	m
j	b	m	r
r	m	b	j
m	r	j	b

335. Suskirstykime mokinius kokiu nors būdu į trejetus. Iš kiekvieno trejeto galima sudaryti po 3 nesutvarkytas poras (pavyzdžiui, iš trejeto *abc* galima sudaryti poras *ab*, *ac* ir *bc*). Pasirinktąjį skirstinį atitinka 15 porų, kurių neturi būti kituose skirstiniuose. Tačiau iš 15 mokinių galima sudaryti $C_{15}^2=105$ poras. Todėl skirtingų skirstinių skaičius negali viršyti $105:15=7$. Toliau pateikiama lentelė įtikina, kad reikšmė 7 pa-

siekiama, t. y. mokinius tikrai įmanoma skirstyti į trejetus, tenkinant nurodytąją sąlygą per 7 dienas:

klo	*ino*	*jmo*	*ilm*	*jln*	*ijk*	*kmn*
iab	*jac*	*lad*	*nae*	*kaf*	*mag*	*oah*
ncd	*mdb*	*kbc*	*ocg*	*mch*	*lce*	*icf*
mef	*keg*	*ieh*	*jfb*	*obe*	*ofd*	*jde*
jgh	*lhf*	*nfg*	*khd*	*idg*	*nhb*	*lbg*

336. Skaičius $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ lygus skaičiui variantų, iš n^2 daiktų sudarant n nesutvarkytų grupių po n daiktų kiekvienoje grupėje. Todėl jis – sveikas skaičius. Skaičius $\frac{(mn)!}{(m!)^n n!}$ yra sveikas, nes tai skaičius variantų iš mn daiktų sudaryti n nesutvarkytų grupių po m daiktų kiekvienoje grupėje. Dėl tos pačios priežasties $\frac{(mn)!}{(n!)^m m!}$ – irgi sveikas skaičius. Bet tada

$$\left(\frac{(mn!)!}{(m!)^{\frac{n+1}{2}}(n!)^{\frac{m+1}{2}}}\right)^2$$

turi būti sveikas skaičius kaip dviejų sveikųjų skaičių sandauga. Kadangi m ir n – nelyginiai skaičiai, tai

$$\frac{(mn)!}{(m!)^{\frac{n+1}{2}}(n!)^{\frac{m+1}{2}}}$$

– racionalus skaičius, kurio kvadratas – sveikas skaičius. Vadinasi, ir pats skaičius – sveikas.

337. Žr. 58–59 p.

338. Tas skaičius lygus koeficientui prie x^m daugianario

$$(x^l+x^{l+1}+\ldots+x^n)^p=x^{lp}(1-x^{n-l+1})(1-x)^{-p}$$

dėstinyje x laipsniais. Taikydami Niutono formulę, įsitikiname, kad tas koeficientas lygus

$$C^m_{m-(l-1)\,p-1}-C^1_p\,C^{m+l-n-1}_{m-(l-1)\,(p-1)-n-1}+C^2_p\,C^{m+2\,(l-n-1)}_{m-(l-1)\,(p-2)-2n-1}-\ldots$$

339. Sakykime, kad pirmasis asmuo gavo x pirmosios knygos egzempliorių, y antrosios knygos egzempliorių ir z trečiosios knygos egzempliorių. Iš uždavinio sąlygos matyti, kad $x+y+z=12$, $0\leqslant x\leqslant 7$, $0\leqslant y\leqslant 8$, $0\leqslant z\leqslant 9$. Lygties $x+y+z=12$ sveikų sprendinių, tenkinančių nurodytąsias sąlygas, skaičius lygus sandaugos

$$(1+t+\ldots+t^7)(1+t+\ldots+t^8)(1+t+\ldots+t^9)$$

dėstinio koeficientui prie t^{12}. Tą sandaugą galima parašyti šitaip:

$$\frac{(1-t^8)(1-t^9)(1-t^{10})}{(1-t)^3}=(1-t^8-t^9-t^{10}+t^{17}+\ldots)\times$$
$$\times(1+3t+6t^2+10t^3+15t^4+\ldots+91t^{12}+\ldots).$$

Lengva įsitikinti, kad, sudauginus skliaustuose parašytuosius reiškinius ir sutraukus panašiuosius narius, koeficientas prie t^{12} bus lygus 60. Todėl yra 60 skirtingų skirstymo variantų.

340. Visų n-elemenčių derinių iš n raidžių su pasikartojimais skaičius lygus C^n_{2n-1}, todėl jiems parašyti suvartojama nC^n_{2n-1} raidžių. Kadangi visos raidės pakartojamos po vienodą skaičių kartų, tai kiekviena raidė parašoma C^n_{2n-1} kartų.

341*. Ant kiekvieno stulpo yra parašyti du skaičiai, kurių suma lygi 999. Jei pirmasis skaičius reiškiamas skaitmenimis a, b ir c, tai užrašas yra toks: $(\overline{abc};\ \overline{(9-a)(9-b)(9-c)})$. Kadangi a ir $9-a$ – skirtingi skaitmenys, tai užrašai, parašyti tik dviem skirtingais skaitmenimis, yra sudaryti iš skaitmenų a ir $9-a$. Gali būti 4 skirtingos kombinacijos: 1) $b=a$, $c=a$; 2) $b=a$, $c=9-a$; 3) $b=9-a$, $c=a$; 4) $b=9-a$, $c=9-a$. Kintamasis a įgyja 10 skirtingų reikšmių, todėl visame kelyje yra $10 \cdot 4=40$ tiriamojo tipo užrašų.

342. Ieškomasis skaičius yra $\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} P(p,\ q)-1$ (atmetame tuščiąjį gretinį). Kadangi $\sum_{q=0}^{n} P(p,\ q)=P(p+1,\ n)$, tai

$$\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} P(p,\ q)-1=\sum_{p=0}^{m} P(p+1,\ n)-1=P(m+1,\ n+1)-2.$$

343. Iš praeito uždavinio matyti, kad skaičius gretinių, kurių kiekviename yra lygiai k baltų rutulių, lygus $P(k+1,\ n+1)-P(k,\ n+1)$. Todėl visuose gretiniuose yra $\sum_{k=1}^{m} k[P(k+1),\ n+1)-P(k,\ n+1)]$ baltų rutulių. Tą reiškinį galima pakeisti šitaip:

$$\sum_{k=1}^{m} kP(k+1,\ n+1)-\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)P(k+1,\ n+1)=$$

$$=mP(m+1,\ n+1)-\sum_{k=0}^{m-1} P(k+1,\ n+1)=$$

$$=mP(m+1,\ n+1)-P(m,\ n+2)+1=1+\frac{mn+m-1}{n+2}P(m+1,\ n+1).$$

Teiginys apie juoduosius rutulius įrodomas analogiškai.

344. Ieškomasis skaičius lygus sumai

$$\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}(p+q+1)P(p,\ q).$$

Tačiau

$$\sum_{q=0}^{n}(p+q+1)P(p,\ q)=(p+1)\sum_{q=0}^{n}P(p,\ q)+\sum_{q=1}^{n}qP(p,\ q)=$$

$$=(p+1)\left(P(p+1,\ n)+\sum_{q=1}^{n}P(p+1,\ q-1)\right)=$$

$$=(p+1)[P(p+1,\ n)+P(p+2,\ n-1)]=(p+1)P(p+2,\ n),$$

Todėl pradžioje pateiktoji suma lygi

$$\sum_{p=0}^{m}(p+1)P(p+2,\ n)=\sum_{p=0}^{m}(p+2)P(p+2,\ n)-\sum_{p=0}^{m}P(p+2,\ n)=$$

$$=(n+1)P(m+1,\ n+2)-P(m+2,\ n+1)+1=1+\frac{mn+m+n}{m+n+4}P(m+2,\ n+2).$$

345. Reikalingasis rezultatas išplaukia iš **342** ir **344** uždavinio rezultatų.

346. Iš 7 žmonių galima sudaryti $C_7^2=21$ porą. Kiekviename trejete (a, b, c) yra trys poros: (a, b), (a, c) ir (b, c). Todėl per 7 dienas visos poros pasirodys po vieną kartą. Kadangi per 7 dienas pietuose dalyvaus 21 žmogus, tai kiekvienas draugas mane aplankys po 3 kartus, t. y. dalyvaus trijuose trejetuose.

Iš pradžių sudarykime trejetus, kuriuose dalyvauja pirmasis draugas. Tai padaryti yra $\frac{6!}{(2!)^3\,3!}$ (6 žmonių suskirstymo į tris poras būdų skaičius). Kai tie trejetai pasirenkami, lieka dvi galimybės sudaryti trejetus, kuriuose dalyvauja antrasis svečias (pavyzdžiui, jei pirmasis yra trejetuose 1, 2, 3; 1, 4, 5; 1, 6, 7, tai antrasis priklauso arba trejetams 2, 4, 6 ir 2, 5, 7, arba trejetams 2, 4, 7 ir 2, 5, 6). Po to likusių svečių pasiskirstymas nustatomas vienareikšmiškai. Turėdami mintyje, kad svečių trejetus galima keisti vietomis, gauname

$$\frac{6!}{(2!)^3\,3!}\cdot 2\cdot 7!=151\ 200$$

variantų.

347. Iš 7 žmonių galima sudaryti $C_7^3=35$ trejetus, iš 6 žmonių — $C_6^3=20$ trejetų, iš penkių žmonių — $C_5^3=10$ trejetų, o iš keturių — $C_4^3=4$ trejetus. Todėl visų kvietimo variantų skaičius lygus A_{35}^7. Bus $7A_{20}^7$ atvejų, kai vienas draugas liks nepakviestas, ir $21A_{10}^7$ atvejų, kai du draugai liks nepakviesti. Taikydami priskirties ir išskirties formulę, gauname reikalingąjį rezultatą.

348. Jei kuris nors draugas ateina kasdien, tai iš kitų 6 draugų galima sudaryti $C_6^2=15$ porų. Todėl skaičius visų kompanijų, kuriose dalyvauja vienas ir tas pats žmogus, lygus $7A_{15}^7$. Lieka $A_{35}^7-7A_{15}^7$ pakvietimo variantų.

349. Gretiniuose gali būti po 1, 2, ..., n daiktų. Todėl visų galimų gretinių skaičius lygus

$$A_n^n+A_n^{n-1}+\ldots+A_n^1=n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\ldots+\frac{n!}{(n-1)!}=$$

$$=n!\left(2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right).$$

Kita vertus,

$$en!-1=n!\left(2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right). \qquad (*)$$

Tačiau, jei n — bet kuris natūrinis skaičius, ne mažesnis už 2, tai

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots<$$

$$<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots=\frac{1}{n}.$$

Todėl reiškinys, parašytas formulės (*) antruosiuose laužtiniuose skliaustuose, yra mažesnis už $\frac{1}{2}$. Teiginys įrodytas.

350. Visuose gretiniuose esančių daiktų skaičius lygus

$$nA_n^n+(n-1)A_n^{n-1}+\ldots+A_n^1=n!\left(n+\frac{n-1}{1!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right)=$$

$$=(n-1)\,n!\left(\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\ldots-\frac{n-2}{(n-1)!}\right)\right).$$

Lengva patikrinti, kad

$$1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\frac{3}{4!}-\ldots-\frac{n-2}{(n-1)!}=\frac{1}{(n-1)!}.$$

Kadangi, sudarant gretinius, kiekvienas daiktas imamas vienodą skaičių kartų, tai nurodytasis daiktas visuose gretiniuose aptinkamas

$$N=(n-1)(n-1)!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right)+1$$

kartų.

Kita vertus,

$$(n-1)(n-1)!\,e=(n-1)(n-1)!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\ldots\right)=$$

$$=(n-1)(n-1)!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right)+(n-1)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots\right),$$

todėl

$$N-(n-1)(n-1)!\,e=1-(n-1)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(1-\frac{n-1}{n+1}-\frac{n-1}{(n+1)(n+2)}-\ldots\right)<\frac{1}{2}\,^{*}.$$

Vadinasi, N – mažiausias natūrinis skaičius, didesnis už $(n-1)(n-1)!e$.

351. Žr. p. 61.

352. Vienas iš tų trijų asmenų gauna n knygų. Tas knygas pasirinkti yra C_{3n}^n būdų. Kitiems dviem asmenims paskirstome $2n$ likusių knygų. Kiekvieną knygą galima įteikti arba vienam, arba kitam asmeniui; todėl paskirstymo variantų skaičius lygus 2^{2n}. Kadangi n pirmųjų knygų galima atiduoti bet kuriam iš tų trijų asmenų, tai iš viso gauname $3\cdot 2^{2n}C_{3n}^n$ paskirstymo variantų.

353. Jei nesuardoma k nurodytųjų raidžių porų, skirtingų dėstinių skaičius lygus $2^k(2n-k)!$. Tas poras pasirinkti yra C_n^k būdų. Taikydami priskirties ir išskirties formulę, gauname reikalingą rezultatą.

354. Kai k nurodytųjų žmonių negauna nė vieno daikto, skirstymo variantų skaičius lygus $(n+p-k)^r$. Taikydami priskirties ir išskirties formulę, gauname reikalingą rezultatą.

355. Kai n skirtingų daiktų dėstome į r dėžių, galimų skirstinių skaičius lygus $r!\,\Pi_n^r$. Tas skaičius lygus funkcijos $(e^x-1)^r$ dėstinio laipsnine eilute koeficientui prie x^n, padaugintam iš $n!$. Iš to matyti, kad skaičius

$$n!\,(1-\Pi_n^2+2!\,\Pi_n^3-3!\,\Pi_n^4+\ldots) \qquad (*)$$

* Aišku, reikia įsitikinti, kad skirtumas $N-(n-1)(n-1)!\,e$ yra teigiamas. Pavyzdžiui, galima įrodyti, kad $\frac{1}{n^2}<N-(n-1)(n-1)!\,e<\frac{1}{n}$, kai $n\geqslant 2$. *Vertėjas*

yra lygus koeficientui, kurį gauname prie x^n, kai funkciją

$$(e^x-1)-\frac{1}{2}(e^x-1)^2+\frac{1}{3}(e^x-1)^3-\frac{1}{4}(e^x-1)^4+\ldots$$

išreiškiame kintamojo x laipsnių eilute. Kadangi

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots=\ln(1+x),$$

tai ta funkcija yra $\ln\left(1+(e^x-1)\right)=x$. Todėl, kai $n>1$, reiškinys (*) lygus nuliui.

356. Iš pirmos dėžutės – vienas būdas, iš antros C_{2n}^n būdų, ..., iš k-tosios C_{kn}^n būdų. Iš viso gauname

$$C_{2n}^n C_{3n}^n\ldots C_{mn}^n=\frac{(mn)!}{(n!)^m}$$

būdų.

357. Reikia įrodyti tokį teiginį: jei $n\geqslant 1$ ir $r\geqslant 1$, tai

$$C_{2n+r}^n C_{2n-r}^n<(C_{2n}^n)^2.$$

Tą nelygybę galima parašyti šitaip:

$$\frac{(2n+r)(2n+r-1)\ldots(2n+1)}{(n+r)(n+r-1)\ldots(n+1)}<\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Pastaroji nelygybė išplaukia iš to, kad $\dfrac{2n+k}{n+k}<\dfrac{2n-k+1}{n-k+1}$, kai $1\leqslant k\leqslant n$.

358. Apskaičiuosime visų gautųjų trikampių kampų sumą. Sudėję kampus, kurių viršūnės yra kuriame nors vidiniame taške, gauname 360°. Kadangi tokių taškų yra 500, tai juos atitinka kampai, kurių suma lygi 360° · 500. Paskui nagrinėjame kampus, kurių viršūnės sutampa su tūkstančiakampio viršūnėmis. Tų kampų suma lygi tūkstančiakampio vidaus kampų sumai, t. y. lygi 180° · 998. Iš viso gauname 180° · 1998. Kadangi kiekvieno trikampio vidaus kampų suma lygi 180°, tai gauname 1998 trikampius.

359. Kiekvienas lošėjas dalyvaus 4 partijose, o iš viso bus suloštos 5 partijos. Sakykime, kad pirmojoje partijoje pora (a, c) lošia prieš porą (b, d). Tada kitose trijose partijose lošėjo a partneriais turi būti b, d ir e, o penktosios partijos a turi nelošti. Lošėjas e turi žaisti visas partijas, išskyrus pirmąją; be to, antroje ir trečioje partijoje jis turi būti lošėjo a priešininku. Į laisvąją vietą antroje partijoje galima pasodinti arba lošėją c, arba lošėją d, o trečioje partijoje – arba b, arba c. Tačiau, jei antroje partijoje žaidžia d, tai trečioje partijoje turi žaisti c (kitaip c praleis dvi partijas); tada ketvirtoje partijoje negali dalyvauti d, o b ir c toje partijoje turi būti partneriai. Tokiu atveju penktoje partijoje b ir e bus partneriai iš vienos pusės, o c ir d – iš kitos.

Jei antroje partijoje žais c, tai ir trečioje partijoje turės žaisti c (priešingu atveju e ir c du kartus žais kaip partneriai), ketvirtoje – c ir d, o penktoje lošėjai b ir c žais prieš d ir e. Vadinasi, pasirinkus pirmosios partijos lošėjus, yra du galimi variantai suskirstyti lošėjus kitoms partijoms. Kadangi 4 tolesniųjų partijų eilę galima keisti 24 būdais, tai iš viso susidaro 48 variantai. Pirmosios partijos lošėjus pasirinkti yra 15 būdų (skaičius būdų suskirstyti 5 žmones į dvi poras, paliekant atsarginį lošėją). Kiekvienas toks pasirinkimas apibrėžia 48 tolesnės mačo eigos variantus. Todėl iš viso turime 720 variantų. Jei į partijų eilę nekreipiama dėmesio, tai lieka 6 variantai.

360. Uždarųjų laužčių skaičius lygus $(C_{2n}^n)^2$ (žr. p. 000).

361. Kiekvieną laužtę apibrėžia jos viršūnių koordinatės. Tos koordinatės sudaro baigtinę seką

$$(a_1,\ b_1),\ (a_1,\ b_2),\ (a_2,\ b_2),\ (a_2,\ b_3),\ \ldots,\ (a_n,\ b_1)$$

arba seką

$$(a_1\ b_1),\ (a_2,\ b_1),\ (a_2,\ b_2)\ (a_3,\ b_2),\ \ldots,\ (a_1,\ b_n).$$

Tos sekos gaunamos, sudarius kėlinius $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ir nurodžius, katram iš paminėtųjų tipų priklauso seka. Kadangi cikliškas koordinačių perstatinėjimas laužtės nepakeičia, tai jų skaičius lygus $\dfrac{(n!)^2}{2n}$.

362. Suskirstykime barškučius į klases, barškutį priskirdami m-tajai klasei, kai m – mažiausias skaičius mėlynų rutuliukų, įterptų tarp dviejų raudonų rutuliukų. Jei $m=0$, tai turime 4 barškučių rūšis: arba visi trys raudonieji rutuliukai stovi vienas prie kito, arba du raudonieji rutuliukai stovi greta, o trečiasis atskirtas nuo jų vienu, dviem ar trim mėlynais rutuliukais. Kai $m=1$, du raudonus rutuliukus skiria vienas mėlynas. Trečiasis raudonas rutuliukas nuo artimiausio raudonojo yra atskirtas arba vienu, arba dviem, arba trimis mėlynais rutuliukais. Todėl, kai $m=1$, yra trys barškučių rūšys. Kai $m=2$, yra tik viena barškučių rūšis. Iš viso – 8 rūšys.

363. Sakykime, kad kas nors iš susirinkimo dalyvių – pavadinkime jį X – turi m pažįstamų žmonių: $a_1, \ldots, a_m$. Iš sąlygos matyti, kad $a_1, \ldots, a_m$ nepažįsta vienas kito (nes jie pažįsta X). Todėl kiekviena tų žmonių pora (a_i, a_j) turi dar vieną bendrą pažįstamąjį, kuris negali būti pažįstamas su X. Skirtingas poras turi atitikti skirtingi žmonės (jei kas nors būtų bendras dviejų skirtingų porų (a_i, a_j) ir (a_k, a_l) pažįstamas, tai jis su asmeniu X turėtų mažiausiai tris bendrus pažįstamus). Vadinasi, visų nepažįstančių X žmonių skaičius nėra mažesnis už skaičių visų porų, kurias galima sudaryti iš žmonių $a_1, \ldots, a_m$, t. y. ne mažesnis už C_m^2.

Kita vertus, kiekvienas žmogus, nepažįstamas su X, turi su juo du bendrus pažįstamus, priklausančius, savaime aišku, grupei $a_1, \ldots, a_m$. Be to, skirtingus žmones atitinka skirtingos pažįstamųjų poros (jei kuri nors pora (a_i, a_j) būtų pažįstama su dviem skirtingais žmonėmis, tai a_i ir a_j turėtų daugiau negu du bendrus pažįstamus: juk jie pažįstami ir su X). Iš to aišku, kad nepažįstamų su X žmonių skaičius nėra didesnis už C_m^2. Todėl tas skaičius lygus $C_m^2=\frac{m(m-1)}{2}$. Bet tada visų dalyvių skaičius n lygus $1+m+$ $+\frac{m(m-1)}{2}$. Lygybę $n=1+m+\frac{m(m-1)}{2}$ laikydami kvadratine lygtimi kintamojo m atžvilgiu, įsitikiname, kad ji turi tik vieną teigiamą šaknį, o tai ir reiškia, kad visų dalyvių pažįstamųjų skaičius yra vienodas.

364. Patikrinus paaiškėja, kad dviejų greta parašytų raidžių A ir B sukeitimas vietomis nepakeičia sandaugos (užtenka ištirti kombinacijas $AABA$, $BABB$ ir $AABB$). Todėl galima tarti, kad pirma surašytos visos raidės A, o paskui – visos raidės B. Šituo atveju teiginys nekelia abejonių.

365. Kiekvienoje vertikalėje ir horizontalėje stovi po vieną bokštą. Todėl kiekvienas skaičius a, b, c, d, e, f, g, h, taip pat ir kiekvienas skaičius 1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8 sandaugoje bus parašytas vieną ir tik vieną kartą. Vadinasi, ta sandauga lygi $8!\, abcdefgh$.

366. Sakykime, susirinko 5 organizacinio komiteto nariai. Iš uždavinio sąlygos matyti, kad jie neturi kuo atrakinti kurios nors spynos ir kad tos spynos raktą turi kiekvienas iš likusių šešių narių*. Kadangi taip atsitinka, susirinkus bet kuriems penkiems nariams, tai visų spynų skaičius lygus $C_{11}^5=462$. Kiekviena spyna turi po šešis raktus, todėl visų raktų skaičius lygus $462 \cdot 6=2772$, o kiekvienas organizacinio komiteto narys turi $2772 : 11=252$ raktus.

367. Pirmiausia išsiaiškinkime, kokio didžiausio ilgio gali būti grandinė, kad, perkirtus k grandžių, būtų galima sudaryti bet kokią masę nuo 1 iki n. Tam išnagrinėkime, kaip naudingiausia pasirinkti perkertamas grandis. Jei perkertama k grandžių, tai iš perkirstųjų grandžių galima sudaryti bet kokią masę nuo 1 iki k. Masės $k+1$ jau nebegalėsime sudaryti, jei neturėsime dar vienos grandinės dalies. Savaime aišku, naudingiausia, kad ta dalis turėtų $k+1$ grandžių: tada galėsime sudaryti bet kokią masę nuo 1 iki $2k+1$. Toliau bus reikalingos grandinės dalys, sudarytos iš $2(k+1)$, $4(k+1)$, ..., $2^k(k+1)$ grandžių. Iš visų tų dalių galėsime sudaryti bet kokią masę nuo 1 iki

$$n=k+\big((k+1)+2(k+1)+4(k+1)+\ldots+2^k(k+1)\big)=$$

$$=k+(k+1)(2^{k+1}-1)=2^{k+1}(k+1)-1.$$

Vadinasi, jei $2^k k \leqslant n < 2^{k+1}(k+1)$, tai pakanka perkirsti k grandžių, bet nepakanka perkirsti $k-1$ grandžių. Nagrinėjamu atveju $2^3 \cdot 3 < 60 < 2^4 \cdot 4 - 1$, todėl 60 grandžių grandinėje reikia perkirsti 3 grandis, sudarant 4, 8, 16 ir 29 gabalus.

---

* Jei kas nors iš tų šešių neturėtų tos spynos rakto, tai, jam prisidėjus prie pirmųjų penkių narių, seifo negalėtų atrakinti net šeši nariai. *Vertėjas*

Jei sveriama dvilėkštėmis svarstyklėmis, tai, be k perkirstųjų grandžių, reikia turėti gabalą, sudarytą iš $2k+1$ grandžių (dėdami tą gabalą ant vienos svarstyklių lėkštės, o perkirstąsias grandis – ant antros, galėsime sudaryti bet kokią masę nuo $k+1$ iki $2k$, o dėdami jį į vieną lėkštę su perkirstosiomis grandimis, – bet kokią masę nuo $2k+1$ iki $3k+1$). Kituose gabaluose turi būti $3(2k+1)$, $9(2k+1)$, ..., $3^k(2k+1)$ grandžių. Iš tų gabalų galėsime sudaryti bet kokią masę nuo 1 iki

$$k+\left((2k+1)+3(2k+1)+\ldots+3^k(2k+1)\right)=\frac{1}{2}\left((2k+1)\,3^{k+1}-1\right).$$

Atskiru atveju, kai grandinė turi 60 grandžių, reikia perkirsti dvi grandis ir sudaryti 5, 15 ir 38 g gabalus.

368. Jei, dalydami skaičių x iš 7, gauname liekanas 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, tai, dalydami x^2, gauname atitinkamas liekanas 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. Todėl x^2+y^2 dalijasi iš 7 (o tuo labiau iš 49) tik tada, kai x ir y dalijasi iš 7. Todėl porų skaičius (atsižvelgiant į tvarką) lygus $\left[\frac{1000}{7}\right]^2=142^2=20\,164$. Jei į tvarką neatsižvelgiame, tai gauname $\bar{C}^2_{142}=10\,153$ poras.

369. Jei skaičius lygus $10a+b$, tai, sudėję jį su skaičiumi, parašytu tais pačiais skaitmenimis priešinga eile, gauname $11(a+b)$. Kadangi ta suma yra sveikojo skaičiaus kvadratas ir, be to, $2\leqslant a+b\leqslant 18$, tai $a+b=11$. Gauname 8 skaičius: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

370. Trys pirmieji skaitmenys yra bet kokie, o ketvirtasis įgyja vieną iš dviejų reikšmių (tos reikšmės priklauso nuo liekanos, kuri gaunama, trijų pirmųjų skaitmenų sumą padalijus iš 3). Todėl kurioje nors vietoje parašius skaitmenį, kitiems skaitmenims pasirinkti lieka $6^2\cdot 2=72$ būdai. Vadinasi, pirmojo skyriaus skaitmenų suma lygi $72\,(1+2+3+4+5+6)=1\,512$, o visų skaičių suma lygi $1\,512+15\,120+151\,200+1\,512\,000=1\,679\,832$.

371. Paskutinėje vietoje gali būti vienas iš skaitmenų 0, 2, 4. Pasirinkus vieną iš tų skaitmenų, antrąją ir trečiąją vietą gali užimti bet kuris iš šešių skaitmenų, o pirmąją – bet kuris iš penkių skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5. Iš viso yra $5\cdot 6\cdot 6\cdot 3=540$ variantų. Todėl pirmojo skyriaus skaitmenų suma lygi $(2+4)\cdot 180=1\,080$. Panašiai įsitikiname, kad antrojo skyriaus skaitmenų suma lygi $(1+2+3+4+5)\cdot 900=13\,500$, trečiojo – 135 000, o ketvirtojo – 1 620 000. Visų skaičių suma lygi 1 769 580.

372. Lygtis $x+y=k$ turi $k-1$ sveikųjų sprendinių, tenkinančių sąlygas $x\geqslant 1$, $y\geqslant 1$. Todėl nelygybė $|x|+|y|\leqslant 1000$ turi

$$4\sum_{k=2}^{1000}(k-1)=1\,998\,000$$

sveikųjų sprendinių, tenkinančių sąlygas $x\neq 0$, $y\neq 0$. Be to, ta nelygybė turi 4000 srendinių, kuriuose vieno kintamojo reikšmė lygi nuliui, ir vieną sprendinį $x=0, y=0$. Iš viso 2 002 001 sprendinys.

373. Jei taškas A_1 nėra kokio nors n-kampio viršūnė, tai galima sudaryti $(n+1)$-kampį, kurio viršūnės yra visos to n-kampio viršūnės ir taškas A_1. Vadinasi, kiekvieną daugiakampį, kurio viršūnės nesutampa su tašku A_1, atitinka daugiakampis su viršūne taške A_1. Kadangi šioje atitiktyje nėra trikampių su viršūne taške A_1, tai daugiakampių su viršūne A_1 yra daugiau.

374. Padarius lyginį skaičių ėjimų, žirgas pastatomas tos pačios spalvos langelyje, kaip ir tas, kuriame jis stovėjo iš pradžių. Mums bus patogu pasukti lentą 45° kampu ir pavaizduoti tik tos spalvos langelius, kiekvieną langelį pakeitus jo centru. Tada langeliai, į kuriuos gali patekti žirgas dviem ėjimais, bus pavaizduoti 42 paveiksle pateikta schema. Tų langelių skaičius lygus 33. Kiekvienas jų savo ruožtu yra centras tokios pačios figūros, parodančios, kur gali patekti žirgas dviem tolesniais ėjimais. Sujungę tas figūras, gauname 43 paveiksle pavaizduotą figūrą. Ji sudaryta iš kvadrato, turinčio $9^2=81$ tašką, ir keturių trapecijų, kurių kiekviena turi po $7+5=12$ taškų.

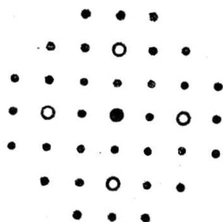
Po $2n$ ėjimų gausime figūrą, sudarytą iš kvadrato, kurio kraštinės ilgis lygus $4n$, ir keturių trapecijų. Kvadrate yra $(4n+1)^2$ taškų, o trapecijose – po

$$(4n-1)+(4n-3)+\ldots+(2n+1)=3n^2$$

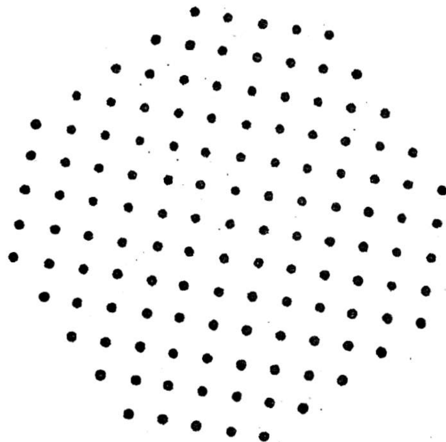
taškų. Iš viso gauname

$$12n^2+(4n+1)^2=28n^2+8n+1$$

taškų. Vadinasi, kai $n>1$, skaičius langelių, į kuriuos gali patekti žirgas po $2n$ ėjimų, lygus $28n^2+8n+1$.



42 pav.



43 pav.

375. Visi trejetai, kuriems priklauso koks nors fiksuotas elementas, pavyzdžiui a, tenkina nurodytąją sąlygą. Tokių trejetų skaičius lygus $C_{1954}^2=1\,908\,081$. Įsitikinsime. kad daugiau trejetų, kurių kiekvieni du turi bendrą elementą, sudaryti neįmanoma. Tarkime, kad sudarėme $N>C_{1954}^2$ tokių trejetų ir kad (a, b, c) – vienas iš tų trejetų, Kadangi bet kuris iš $N-1$ likusių trejetų turi bendrą elementą su pasirinktuoju trejetu (a, b, c), tai bent vienas iš elementų a, b ir c, pavyzdžiui, a įeis į $\frac{N-1}{3}$ trejetų sudėtį; be to, $\frac{N-1}{3}>636\,026$. Tokių trejetų, kuriems priklauso ne tik a, bet ir bent vienas iš elementų b ir c, yra ne daugiau kaip 3 906 Todėl yra bent vienas trejetas (a, d, e), kuriame d ir e nesutampa nei su b, nei su c. Panašiai įsitikiname, kad turi būti trejetai (a, f, g) ir (a, h, j), kuriuose f ir g nesutampa su b, c d ir e, o h ir j – su b, c, d, e, f ir g.

Kiekvienas iš N sudarytųjų trejetų turi bent vieną bendrą elementą su kiekvienu iš keturių trejetų (a, b, c), (a, d, e), (a, f, g) ir (a, h, j). Savaime aišku, kad vienas bendrasis elementas turi būti a: priešingu atveju tame trejete būtų keturi skirtingi elementai. Vadinasi, kiekvienam trejetui priklauso elementas a; todėl trejetų skaičius negali būti didesnis už C_{1954}^2.

376. Parašytosios sekos skaitmenų skaičius lygus $9+2\cdot 90+3\cdot 900+\ldots+8\cdot$ $\cdot\, 90\,000\,000+9$. Apskaičiuosime, kiek nulių yra sekoje $1, 2, \ldots, 10^9$. Tuo tikslu visus skaičius nuo 1 iki 10^9-1 imtinai pakeisime devyniaženkliais skaičiais, priekyje prirašydami trūkstamus nulius (pavyzdžiui, 000 000 003), o 10^9 išreikšime nuliais: 000 000 000. Tada gausime $9\cdot 10^9$ skaitmenų, o kiekvienas skaitmuo bus parašytas tiek pat kartų, kiek ir bet kuris kitas skaitmuo. Todėl gausime $9\cdot 10^8$ nulių. Tačiau dalį tų nulių prirašėme mes patys: prie vienaženklių skaičių prirašėme $8\cdot 9$ nulių, prie dviženklių – $7\cdot 90$ nulių ir t. t. Jei tuos nulius vėl nubrauksime, tai liks $9\cdot 10^8-8\cdot 9-$ $-7\cdot 90-\ldots-9\cdot 10^7$ nulių. Lengva įsitikinti, kad tas skaičius lygus sumai $2\cdot 9+$ $+2\cdot 90+\ldots+8\cdot 9\cdot 10^7$, t. y. sąlygoje nurodytosios sekos skaitmenų skaičiui.

377. Jei pirmųjų dviejų skaitmenų suma lygi k ir $k \leqslant 9$, tai yra $(k+1)^2$ nurodytojo tipo skaičių; kai $k>9$, tokių skaičių yra $(19-k)^2$. Iš viso gaunome

$$2(1^2+\ldots+9^2)+10^2=670$$

skaičių.

378. Dalykų, kuriuos mokinys a mokosi labai gerai, aibę žymėsime raide A. Kiekviena tokia aibė turi ne daugiau kaip $2n$ elementų. Be to, iš uždavinio sąlygos matyti, kad nė viena iš tų aibių nėra kitos aibės dalis. Tas aibes suskirstysime į klases, k-tajai klasei priskirdami aibes, turinčias po k elementų. Kuri nors iš sudarytųjų aibių turi mažiausiai elementų, pavyzdžiui, r elementų. Įsitikinsime, kad tuo atveju, kai $r<n$, sudarytąją aibių sistemą galima pakeisti kita sistema, turinčia tokias savybes:

a) nė viena naujosios sistemos aibė nėra kitos aibės dalis;

b) naujojoje sistemoje yra daugiau aibių negu senojoje;

c) mažiausias elementų skaičius naujosios sistemos aibėse lygus $r+1$.

Imkime visas aibes, sudarytas iš r elementų, ir prie kiekvienos tų aibių visais galimais būdais prijunkime po vieną jai nepriklausantį elementą. Kitų senosios sistemos aibių nekeisime. Aišku, kad po šios operacijos gausime aibių sistemą, kurios kiekviena aibė turės ne mažiau kaip $r+1$ elementų. Be to, nė viena naujosios sistemos aibė nėra kitos aibės dalis: jei naujoji aibė A' būtų aibės B dalis, tai r-tos klasės aibė A, iš kurios, prijungdami vieną elementą, sudarėme aibę A, irgi būtų aibės B dalis, o tai prieštarauja sąlygai. Be to, pabrėšime, kad nė viena naujoji aibė nesutampa su senosios sistemos aibėmis. Pavyzdžiui, tarkime, kad naujoji aibė A' gauta iš aibės A, prijungus elementą x. Jeigu ji sutaptų su senosios sistemos aibe B, tai aibė A būtų aibės B dalis, o tai prieštarauja sąlygai.

Dar reikia įrodyti, kad naujųjų aibių skaičius yra didesnis už senųjų aibių skaičių. Pastebėsime, kad iš kiekvienos aibės A, priklausančios r-tajai klasei, sudaroma $2n-r$ naujųjų aibių (aibei A nepriklauso $2n-r$ elementų), bet kai kurios gautosios aibės sutampa (pavyzdžiui, iš aibių $\{a;\ b\}$ ir $\{b;\ c\}$, prijungdami po vieną elementą, gauname tą pačią aibę $\{a;\ b;\ c\}$). Kadangi gautoji aibė turi $r+1$ elementų, tai ją sudaryti iš r-elemenčių aibių yra tik $r+1$ būdų. Vadinasi, jei r-toje klasėje buvo m aibių, o iš jų sudaryta p skirtingų aibių, tai $m(2n-r) \leqslant p(r+1)$. Kadangi iš nelygybės $r<n$ išplaukia $2n-r>$ $>r+1$, tai $N<p$, t. y. aibių skaičius padidėjo.

Kartodami aprašytąjį procesą, visas aibes, turinčias mažiau negu n elementų, galime pakeisti n-elementėmis aibėmis; be to, gautoji aibių sistema tenkins sąlygą a) ir turės daugiau aibių negu pirmoji sistema. Panašiu būdu galima pakeisti visas aibes, kuriose yra daugiau negu n elementų (jos nuosekliai keičiamos aibėmis, gaunamomis, išmetant po vieną elementą). Galų gale gausime n-elemenčių aibių sistemą, kurioje bus daugiau aibių negu pradinėje sistemoje. Iš $2n$ elementų galima sudaryti tik C_{2n}^n aibių, turinčių po n elementų. Vadinasi, pradinės sistemos aibių skaičius nebuvo didesnis už C_{2n}^n, t. y. mokykloje buvo ne daugiau kaip C_{2n}^n mokinių.

379. Elementus, kurių skaičius lygus m, pavadinkime pirmojo tipo elementais, o elementus, kurių skaičius lygus n, — antrojo tipo elementais. Iš tų $m+n$ elementų sudarinėjamus r-elemenčius gretinius suskirstome į klases, k-tajai klasei priskirdami gretinius, kuriuose yra lygiai k pirmojo tipo elementų. Tada k-toje klasėje bus $C_r^k A_m^k A_n^{r-k}$ gretinių: yra C_r^k būdų pasirinkti vietas, kuriose stovi pirmojo tipo elementai, paskui yra A_m^k būdų užpildyti pasirinktąsias vietas pirmojo tipo elementais ir A_n^{r-k} būdų užpildyti $k-r$ likusių vietų antrojo tipo elementais.

Vadinasi, iš $m+n$ elementų sudarinėjamų r-elemenčių gretinių skaičius lygus $\sum_{k=0}^{r} C_r^k A_m^k A_n^{r-k}$, arba žymint, kaip nurodyta sąlygoje, $\sum_{k=0}^{r} C_r^k M_k N_{r-k}$. Ši suma kaip tik gaunama, pakėlus laipsniu $(M+N)^r$ ir pakeitus rodiklius indeksais.

Pastebėsime, kad k-tosios klasės gretinių skaičių galima rasti ir kitaip: pasirenkame k pirmojo tipo elementų, $r-k$ antrojo tipo elementų ir visais galimais būdais perstatinėjame tuos elementus. Šitaip galima sudaryti $P(k,\ r-k) A_m^k A_n^{r-k} = C_r^k A_m^k A_n^{r-k}$ skirtingų gretinių.

380. Laipsnio rodiklį 8 galima sudaryti iš rodiklių 2 ir 3 šitaip: $8=2+2+2+2=$ $=2+3+3$. Tai reiškia, kad x^2 pažymėjus raide y, o x^3 — raide z, ieškomasis koeficien-

tas bus lygus $(1+y-z)^9$ dėstinio koeficientų prie y^4 ir yz^2 sumai. Pagal daugianario kėlimo laipsnių formulę tas koeficientas lygus $P(5, 4, 0)+P(6, 2, 1)=378^*$.

381. Kadangi

$$(1+x)^k+\ldots+(1+x)^n=\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^k}{x},$$

tai koeficientas prie x^m lygus $C_{n+1}^{m+1}-C_k^{m+1}$, kai $m<k$, ir C_{n+1}^{m+1}, kai $m\geqslant k$.

382. Pastebėkime, kad $17=7+5+5$ ir kad skaičiaus 18 negalima išreikšti dėmenų, kartotinių skaičiams 5 ir 7, suma. Todėl laipsnio x^{17} koeficientas lygus $C_{20}^1 C_{19}^2=3\,420$, o laipsnio x^{18} – nuliui.

383. Kadangi $17=2+2+2+2+2+2+2+3=2+2+2+2+3+3+3=2+3+3+$ $+3+3+3$, tai $(1+x^2-x^3)^{1000}$ dėstinio narys su x^{17} turi koeficientą

$$-C_{1000}^7 C_{993}^1-C_{1000}^4 C_{996}^3-{}_{1000}^{1} C_{999}^5,$$

o $(1-x^2+x^3)^{1000}$ dėstinio narys su x^{17} – koeficientą

$$-C_{1000}^7 C_{993}^1+C_{1000}^4 C_{996}^3-C_{1000}^1 C_{999}^5.$$

Savaime aišku, kad antrasis koeficientas yra didesnis.

384. Sąlygoje pasakyta, kad

$$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2n}x^{2n}. \qquad (*)$$

Pirmiausia įsitikinkime, kad $a_k=a_{2n-k}$. Tuo tikslu vietoj x parašykime $\frac{1}{y}$ ir abi gautosios lygybės puses padauginkime iš y^{2n}. Tada gausime

$$(y^2+y+1)^n=a_0y^{2n}+a_1y^{2n-1}+\ldots+a_{2n}. \qquad (**)$$

Lygindami lygybes (*) ir (**), įsitikiname, kad $a_k=a_{2n-k}$.

Dabar lygybėje (*) vietoj x parašykime $-x$. Tada gausime lygybę

$$(1-x+x^2)^n=a_0-a_1x+a_2x^2-\ldots+a_{2n}x^{2n}. \qquad (***)$$

Sudauginę lygybes (*) ir (***) panariui, įsitikiname, kad

$$(1+x^2+x^4)^n=\sum_{k=0}^{4n}(-1)^k(a_0a_k-a_1a_{k-1}+\ldots+(-1)^k a_k a_0)\,x^k. \qquad (****)$$

Aišku, kad šios lygybės kairėje pusėje parašyto laipsnio dėstinyje yra tik nariai su lyginiais kintamojo x laipsnio rodikliais. Todėl koeficientas prie x^{2n-1} lygus nuliui. Kadangi dešinėje pusėje laipsnio x^{2n-1} koeficientas lygus

$$-(a_0a_{2n-1}-a_1a_{2n-2}+a_2a_{2n-3}-\ldots-a_{2n-1}a_0)=$$
$$=-(a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-\ldots-a_{2n-1}a_{2n}),$$

tai lygybė a) teisinga.

Pastebėkime, kad, remdamiesi lygybe (*), dėstinį (****) galime parašyti šitaip:

$$(1+x^2+x^4)^n=a_0+a_1x^2+a_2x^4+\ldots+a_{2n}x^{4n}.$$

Iš čia matyti, kad dėstinio koeficientas prie x^{2n} lygus a_n. Kita vertus, iš lygybės (****) sprendžiame, kad tas koeficientas reiškiamas taip:

$$a_0a_{2n}-a_1a_{2n-1}+a_2a_{2n-2}-\ldots+a_{2n}a_0=2a_0^2-2a_1^2+2a_2^2-\ldots+(-1)^n a_n^2.$$

Iš to, kas pasakyta, išplaukia lygybė b).

Lygybę (*) parašykime šitaip:

$$(1-x^3)^n=(1-x)^n(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n).$$

Laipsnius $(1-x^3)^n$ ir $(1-x)^n$ išdėstę pagal Niutono formulę, gauname lygybę

$$1-C_n^1 x^3+C_n^2 x^6-\ldots+(-1)^n C_n^n x^{3n}=$$
$$=(1-C_n^1 x+C_n^2 x^2-\ldots+(-1)^n C_n^n x^n)(a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots+a_{2n} x^{2n}).$$

Jei r nesidalija iš 3, tai koeficientas prie x^r kairėje pusėje lygus nuliui. Dešinėje pusėje koeficientas prie x^r reiškiamas šitaip:

$$a_r-C_n^1 a_{r-1}+C_n^2 a_{r-2}-\ldots+(-1)^r C_n^r a_0.$$

Vadinasi, kai r nesidalija iš 3, tas reiškinys lygus nuliui; priešingu atveju, kai $r=3k$, jis lygus $(-1)^k C_n^k$. Įrodėme, kad lygybė c) teisinga.

Lygybėje (*) vietoj x rašydami 1, įsitikiname, kad

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2n}=3^n.$$

Tokiu pat būdu iš dėstinio (**) gauname lygybę

$$a_0-a_1+a_2-\ldots+a_{2n}=1.$$

Sudėję pastarąsias lygybes ir iš pirmosios atėmę antrąją, gauname sąryšius d).

385. Turime C_n^1 narių x_k^3, $2C_n^2$ narių $x_j^2 x_k$ $(j\neq k)$ ir C_n^3 narių $x_i x_j x_k$ $(i\neq j,\ i\neq k,\ j\neq k)$. Iš viso $C_n^1+2C_n^2+C_n^3$ narių.

386. Pateiktąjį daugianario kvadratą galima išreikšti šitaip:

$$(1+x+\ldots+x^{n-1})^2=\frac{(x^n-1)^2}{(x-1)^2}=(x^n-1)^2(x-1)^{-2}=$$
$$=(x^{2n}-2x^n+1)(1+2x+3x^2+\ldots+mx^{m-1}+\ldots).$$

Todėl koeficientas prie x^k lygus $k+1$, kai $0\leqslant k\leqslant n-1$, ir $2n-k-1$, kai $n\leqslant k\leqslant 2n-2$. Atsakymą galima parašyti šitaip: $n-|n-k-1|$.

387. Kadangi $C_{n+1}^{r+1}=\frac{n+1}{r+1}C_n^r$, $C_n^r=\frac{n}{r}C_{n-1}^{r-1}$, tai kairiąją lygybės pusę galima pertvarkyti šitaip:

$$\frac{\frac{n}{r}\left(\frac{n+1}{r+1}-1\right)(C_{n-1}^{r-1})^2}{\left(\frac{n^2}{r^2}-\frac{(n+1)n}{(r+1)r}\right)(C_{n-1}^{r-1})^2}=\frac{\frac{n(n-r)}{r(r+1)}}{\frac{n(n-r)}{r^2(r+1)}}=r.$$

388. Iš n elementų, jungiant po 3 elementus, galima sudaryti n^3 gretinių su pasikartojimais. Suskirstykime tuos gretinius į klases, k-tajai klasei priskirdami gretinius, kuriuose yra lygiai k skirtingų tipų elementų. Pirmosios klasės gretinių skaičius lygus C_n^1, antrosios — $6C_n^2$ (n būdų pasirinkti elementą, kuris gretinyje rašomas du kartus, $n-1$ būdų pasirinkti elementą, kuris rašomas vieną kartą, ir trys tų elementų kėliniai), o trečiosios klasės gretinių skaičius lygus $A_n^3=6C_n^3$. Iš viso turime $C_n^1+6C_n^2+6C_n^3$ gretinių. Iš to išplaukia pirmoji lygybė. Norėdami įrodyti antrąją lygybę, panašiai skirstome į klases gretinius su pasikartojimais, kuriuose yra bent vienas fiksuoto tipo elementas. Gauname lygybę

$$(n+1)^3-n^3=1+6C_n^1+6C_n^2,$$

iš kurios ir išvedame reikalingąją lygybę.

389. Įrodome panašiai, kaip ir 388 uždavinio teiginius, tik dabar tiriame gretinius su pasikartojimais, sudaromus iš n elementų, jungiamų po 4 elementus.

390. Nagrinėsime lygybę

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n=\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Jos kairiąją pusę, remdamiesi Niutono formule, galime išreikšti taip:

$$\frac{(-1)^n}{2^n}\left(1+C_n^1(-i\sqrt{3})+C_n^2(-i\sqrt{3})^2+C_n^3(-i\sqrt{3})^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^n}\left((1-3C_n^2+9C_n^4-\ldots)-i\sqrt{3}\,(C_n^1-3C_n^3+\ldots)\right).$$

Palyginę tiriamosios lygybės abiejų pusių realiąsias ir menamąsias dalis, gauname įrodomąsias lygybes.

391. Parašykime tapatybę

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^nx^n$$

ir kintamąjį x pakeiskime iš eilės skaičiais 1, $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ ir $\varepsilon^2(\varepsilon^3+\varepsilon+1=0)$. Gauname lygybes

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n,$$

$$(1+\varepsilon)^n=C_n^0+C_n^1\varepsilon+C_n^2\varepsilon^2+\ldots+C_n^n\varepsilon^n,$$

$$(1+\varepsilon^2)^n=C_n^0+C_n^1\varepsilon^2+C_n^2\varepsilon^4+\ldots+C_n^n\varepsilon^{2n}.$$

Kadangi $1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}=0$, kai k nesidalija iš 3, ir $1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}=3$, kai k dalijasi iš 3, tai

$$2^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\varepsilon^2)^n=3\,(C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots).$$

Tačiau

$$1+\varepsilon=-\varepsilon^2=-\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},$$

$$1+\varepsilon^2=-\varepsilon=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3};$$

todėl

$$2^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\varepsilon^2)^n=2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}.$$

Iš to darome išvadą, kad

$$C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

Kitas dvi lygybes gauname analogiškai, tirdami tokias sumas:

$$2^n+\varepsilon\,(1+\varepsilon)^n+\varepsilon^2\,(1+\varepsilon^2)^n,\quad 2^n+\varepsilon^2\,(1+\varepsilon)^n+\varepsilon\,(1+\varepsilon^2)^n.$$

Lygybė d) išvedama analogiškai, nagrinėjant reiškinį $(1+i)^n$.

392. Turime tapatybę

$$(1+x)^n+(1-x)^n=2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2k}x^{2k}.$$

Kadangi to daugianario koeficientai yra teigiami, tai jis įgyja didžiausią reikšmę, kai $x=1$. Ta reikšmė lygi 2^n.

393.

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{n!\,(m-x)!}{m!\,(n-x)!}=\frac{1}{C_m^n}\sum_{x=0}^{n}C_{m-x}^{m-n}=\frac{C_{m+1}^{m-n+1}}{C_m^n}=\frac{m+1}{m-n+1},$$

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{C_n^xC_n^r}{C_{2n}^{x+r}}=\frac{n!\,C_n^r}{(2n)!}\sum_{x=0}^{n}\frac{(x+r)!\,(2n-x-r)!}{x!\,(n-x)!}=$$

$$=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{x=0}^{n}C_{x+r}^{r}C_{2n-x-r}^{n-r}=\frac{(n!)^2}{(2n)!}C_{2n+1}^{n+1}=\frac{2n+1}{n+1}.$$

394. Sumą, parašytą kairėje lygybės pusėje, galima pakeisti šitaip:

$$\sum_{k=1}^{n} C_{m+k-1}^{k} = C_{m+n}^{m} - 1.$$

Tokia pat reikšmę turi ir suma, parašyta dešinėje lygybės pusėje.

395. $$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^{x}} = \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \sum_{x=1}^{n} \frac{x(2n-x-1)!}{(n-x)!} =$$

$$= \frac{2n}{(2n-1)\,C_{2n-2}^{n-1}} \sum_{x=1}^{n} C_{2n-x-1}^{n-1} - \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{x=1}^{n} C_{2n-x}^{n} =$$

$$= \frac{2nC_{2n-1}^{n-1}}{(2n-2)\,C_{2n-2}^{n-1}} - \frac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n-1}^{n-1}} = \frac{2}{n+1}.$$

396. $$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^{x}} = \frac{(n-1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^{n} \frac{x(n+q-x)!}{(n-x)!} =$$

$$= \frac{(n+q+1)(n-1)!\,q!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x}^{n-x} - \frac{(n-1)!\,(q+1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x+1}^{n-x} =$$

$$= \frac{(n+q+1)(n-1)!\,q!}{(n+q)!} C_{n+q}^{n-1} - \frac{(n-1)!\,(q+1)!}{(n+q)!} C_{n+q+1}^{n-1} =$$

$$= \frac{n+q+1}{q+1} - \frac{n+q+1}{q+2} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}.$$

397. Kadangi

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_{n+q}^{x}} = \frac{(n-2)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^{n} \frac{x(x-1)(n+q-x)!}{(n-x)!},$$

tai, remdamiesi tapatybe

$$x(x-1) = (n+q-x+1)(n+q-x+2) + (n+q+1)[n+q-2(n+q-x+1)],$$

įsitikiname, kad tiriamoji suma lygi

$$\frac{(n-2)!}{(n+q)!}\Big((q+2)! \sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x+2}^{n-1} - 2(n+q+1)(q+1)! \sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x+1}^{n-x} +$$

$$+(n+q)(n+q+1)\,q! \sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x}^{n-x}\Big) = \frac{(n-2)!\,q!}{(n+q)!}\Big((q+1)(q+2)\,C_{n+q+2}^{n-1} -$$

$$-2(n+q+1)(q+1)\,C_{n+q+1}^{n-1} + (n+q)(n+q+1)\,C_{n+q}^{n-1}\Big).$$

Dabar vietoj C_{n+q+2}^{n-1}, C_{n+q+1}^{n-1} ir C_{n+q}^{n-1} parašome jų reikšmes ir, atlikę veiksmus, gauname reikalingąją lygybę.

398. Žinome, kad $C_{n-1}^{k-1}=\frac{k}{n}C_n^k$. Kadangi

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+\ldots+C_n^kx^k+\ldots+C_n^nx^n, \qquad (*)$$

tai, remdamiesi nurodytąja lygybe, gauname

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+\ldots+kC_n^kx^{k-1}+\ldots+nC_n^nx^{n-1} \qquad (**)$$

(skaitytojas, susipažinęs su diferencialiniu skaičiavimu, gali gauti šią formulę, diferencijuodamas abi lygybės (*) puses panariui).

Sudauginę panariui lygybes (*) ir (**), gauname tapatybę

$$n(1+x)^{2n-1}=(1+C_n^1x+\ldots+C_n^nx^n)(C_n^1+\ldots+nC_n^nx^{n-1}).$$

Palyginus koeficientus prie x^{n-1} abiejose pusėse, išvedama reikalingoji lygybė.

399. Iš n tipų elementų sudarome visus n-elemenčius derinius su pasikartojimais. Jų skaičius lygus C_{2n-1}^n. Tuos derinius suskirstome į klases, k-tajai klasei priskirdami derinius, kuriuose yra lygiai k skirtingų tipų elementai. Šitaip k-tajai klasei bus priskirta $C_n^kC_{n-1}^{n-k}$ derinių (yra C_n^k variantų pasirinkti k tipų, kurių elementai sudaro tos klasės derinius, o iš k pasirinktųjų tipų elementų galima sudaryti C_{n-1}^{n-k} n-elemenčių derinių su pasikartojimais, kurių kiekviename yra visų k tipų elementai). Vadinasi, $C_{2n-1}^n=$

$$=\sum_{k=1}^{n}C_n^kC_{n-1}^{n-k}.$$

Skaičius C_{2n-1}^n, C_n^k ir C_{n-1}^{n-k} išreiškę faktorialais, gauname reikalingąją lygybę.

400. Įrodomąją lygybę galima parašyti šitaip:

$$C_{n+r-1}^r-C_n^1C_{n+r-3}^{r-2}+C_n^2C_{n+r-5}^{r-4}-\ldots=C_n^r.$$

Ją įrodydami, nagrinėsime visus r-elemenčius derinius su pasikartojimais, sudarytus iš n tipų elementų, ir dviem būdais apskaičiuosime, kiek tų derinių yra sudaryta tik iš skirtingų tipų elementų. Tokių derinių skaičius lygus C_n^r. Kita vertus, skaičius r-elemenčių derinių su pasikartojimais iš n tipų elementų, į kuriuos bent du kartus įeina k nurodytųjų tipų elementai, lygus $C_{n+r-2k-1}^{r-2k}$. Kadangi pasirinkti tuos k tipų yra C_n^k būdų, tai, remdamiesi priskirties ir išskirties formule, gauname įrodomąją lygybę.

401. a) Sakykime, kad $S_n=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n$. Remdamiesi lygybe $C_n^k=C_n^{n-k}$, įsitikiname, kad $S_n=nC_n^0+(n-1)C_n^1+\ldots+C_n^{n-1}$. Sudėję gauname

$$2S_n=n(C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n)=2^nn.$$

Todėl $S_n=2^{n-1}n$. b) Tuo pačiu metodu įrodome, kad $S_n=(n+1)2^{n-1}$.

c) $S_n=(n-2)2^{n-1}+1$. d) $S_n=(n+1)2^n$. e) $S_n=0$. f) Šiuo atveju

$$S_n=4(C_n^1+2C_n^2+\ldots+nC_n^n)-(C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n)=2^{n+1}n-2^n+1.$$

g) Kadangi $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$, tai

$$S_n=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1-2(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)+3(C_{n-1}^2+C_{n-1}^3)-\ldots+(-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1}=$$

$$=C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^2-\ldots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}.$$

Kai $n=1$, šita suma lygi 1, o kai $n>1$, ji lygi 0. h) Parašytoji suma lygi

$$S_n=\frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\ldots+C_{n+1}^{n+1})=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

i) Kadangi $C_n^k = \frac{(k+2)(k+1)}{(n+1)(n+2)} C_{n+2}^{k+2}$, tai nurodytoji suma lygi

$$S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(C_{n+2}^2 + 2C_{n+2}^3 + \ldots + (n+1) C_{n+2}^{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\left(C_{n+2}^1 + 2C_{n+2}^2 + \ldots + (n+2) C_{n+2}^{n+2}\right) - (C_{n+2}^1 + \ldots + C_{n+2}^{n+2})\right).$$

Remdamiesi uždavinių a) ir b) rezultatais, gauname

$$S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} (2^{n+1}(n+2) - 2^{n+2} + 1) = \frac{2^{n+1} n + 1}{(n+1)(n+2)}.$$

k) Nurodytąją sumą parašykime šitaip:

$$S_n = \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + \ldots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

(laužtiniuose skliaustuose parašytoji suma lygi 1). l) Jei n – nelyginis skaičius, tai $S_n = 0$, o jei $n = 2k$ – lyginis skaičius, tai $S_n = (-1)^k C_{2k}^k$. Norint tai įrodyti, reikia sudauginti laipsnių $(1+x)^n$ ir $(1-x)^n$ dėstinius ir surasti koeficientą prie x^n.

402. Pirmajame dėstinyje didžiausią koeficientą turi sandauga $a^3b^3c^4$ (arba $a^3b^4c^3$, arba $a^4b^3c^3$). Jis lygus $P(3, 3, 4) = 4\,200$. Antrajame dėstinyje didžiausią koeficientą turi sandauga $a^3b^3c^4d^4$; jis lygus $P(4, 4, 3, 3)$.

403. Taikydami Niutono formulę, gauname šitokį dėstinį:

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-4x)^n. \qquad (*)$$

Todėl laipsnio x^n koeficientas Y_n yra šitoks:

$$Y_n = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1) \cdot 2^n}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n.$$

Taikydami Niutono formulę funkcijai $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$, gauname dėstinį

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-4x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{1-2n} x^n.$$

Tačiau

$$\frac{Y_n}{1-2n} = -\frac{C_{2n}^n}{2n-1} = -\frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)} = -\frac{2}{n} \cdot \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} = -\frac{2}{n} Y_{n-1}.$$

Todėl, tardami, kad $Y_0 = 1$, gauname

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_{n-1}}{n} x^n. \qquad (**)$$

404. Sudauginę panariui lygybes (*) ir (**), gauname

$$1=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} Y_n x^n\right)\left(1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_{n-1}}{n}x^n\right)=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(Y_n-2\left(Y_{n-1}+\frac{1}{2}Y_{n-2}Y_1+\ldots+\frac{1}{n}Y_{n-1}\right)\right)x^n.$$

Iš čia betarpiškai išplaukia įrodomoji lygybė.

b) Abi lygybės (*) puses pakėlę kvadratu, gauname

$$(1-4x)^{-1}=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} Y_n x^n\right)^2=1+(Y_0 Y_1+Y_1 Y_0)x+$$

$$+(Y_0 Y_2+Y_1 Y_1+Y_2 Y_0)x^2+\ldots+(Y_0 Y_n+Y_1 Y_{n-1}+\ldots+Y_n Y_0)x^n+\ldots$$

Kadangi $(1-4x)^{-1}=1+4x+4^2x^2+\ldots+4^nx^n+\ldots$, tai iš karto gauname nurodytąją lygybę.

c) Abi lygybės (**) puses pakelkite kvadratu.

405. Lyginius skaičius žymėkime raide L, o nelyginius – raide N. Keturi pirmieji trečiosios eilutės skaičiai sudaro užrašą $NLNL$, ketvirtosios – $NNLN$, penktosios – $NLLL$, šeštosios – $NNNL$, septintosios – $NLNL$. Toliau ciklas turi kartotis, nes keturi pirmieji kiekvienos eilutės elementai nustatomi iš keturių pirmųjų ankstesnės eilutės elementų. Todėl kiekvienoje eilutėje bus bent vienas lyginis skaičius.

406. Įsitikinsime, kad kiekviena trikampio eilutė yra aritmetinė progresija ir kad vienodai nutolusių nuo eilutės galų elementų suma dalijasi iš 1958. Įrodysime tuos teiginius, taikydami indukcijos metodą eilutės numerio atžvilgiu. Pirmoji eilutė, be abejo, turi tas savybes. Sakykime, įrodėme, kad tos savybės būdingos n-tajai eilutei. Imkime tris gretimus n-tosios eilutės narius a, $a+d$ ir $a+2d$. Juos atitinka $(n+1)$-osios eilutės elementai $2a+d$ ir $2a+3d$. Vadinasi, $(n+1)$-oje eilutėje parašyta aritmetinė progresija, kurios skirtumas lygus $2d$. Norint rasti elementų, vienodai nutolusių nuo tos eilutės galų, sumą, užtenka rasti pirmojo ir paskutiniojo elementų sumą. Tačiau, jei du pirmieji n-tosios eilutės elementai lygūs a ir b, o du paskutinieji – c ir d, tai pirmojo ir paskutiniojo $(n+1)$-osios eilutės elementų suma lygi $(a+b)+(c+d)=2(a+d)$. Todėl pagal indukcijos prielaidą ji dalijasi iš 1958. Vadinasi, bet kurios eilutės pirmojo ir paskutiniojo elementų suma dalijasi iš 1958. Ta savybė būdinga ir dviejų priešpaskutinės eilutės elementų sumai, t. y. paskutiniam lentelės nariui.

407. a) Tą lygybę įrodysime indukcijos metodu, taikydami jį sumai $n+m$. Tarkime, kad su bet kokiomis sveikomis neneigiamomis k ir s reikšmėmis, tenkinančiomis sąlygą $k+s<n+m$, ta lygybė yra teisinga. Tada

$$u_{n+m}=u_{n+m-1}+u_{n+m-2}=u_{n-1}u_{m-1}+u_n u_m+u_{n-1}u_{m-2}+u_n u_{m-1}=$$

$$=u_{n-1}(u_{m-1}+u_{m-2})+u_n(u_m+u_{m-1})=u_{n-1}u_m+u_n u_{m+1}. \qquad (*)$$

Kadangi ši lygybė, kai $n+m=1$, patikrinama betarpiškai, tai ji teisinga su bet kokiomis m ir n reikšmėmis.

b) Įrodysime indukcijos metodu, taikydami jį kintamajam k. Kai $k=1$, teiginys trivialus. Sakykime, jau įrodyta, kad u_{km} dalijasi iš u_m. Iš lygybės (*) turime

$$u_{(k+1)m}=u_{km+m}=u_{km-1}u_m+u_{km}u_{m+1},$$

todėl $u_{(k+1)m}$ dalijasi iš u_m. Remdamiesi indukcijos aksioma, nusprendžiame, kad visi u_{km} dalijasi iš u_m.

c) Jei u_n ir u_{n+1} turėtų bendrą daliklį k ir $k\neq 1$, tai ir $u_{n-1}=u_{n+1}-u_n$ dalytųsi iš k. Tęsdami šį samprotavimą, įsitikintume, kad $u_1=1$ dalijasi iš k, o tai neįmanoma.

408. Bendrą didžiausią skaičių a ir b daliklį žymėsime (a, b). Iš lygybės $u_{m+n}=u_{n-1}u_m+u_n u_{m+1}$ matyti, kad (u_{m+n}, u_n) yra sandaugos $u_{n-1}u_m$ daliklis. Kadangi u_n

ir u_{n-1} – reliatyviai pirminiai skaičiai, tai (u_{m+n}, u_n) yra skaičiaus u_m daliklis. Kita vertus, (u_m, u_n) yra skaičiaus u_{m+n} daliklis. Todėl $(u_m, u_n)=(u_{m+n}, u_n)$. Iš to išplaukia, kad $(u_m, u_n)=(u_m, u_q)$, jei $n=km+q$. Taikydami Euklido algoritmą, įsitikinam., kad $(u_m, u_n)=u_{(m,n)}$. Atskiru atveju gauname $(u_{1000}, u_{770})=u_{10}=55$.

409. Imkime seką, sudarytą iš keturių paskutinių Fibonačio skaičių skaitmenų. Kadangi keturženklių skaičių 0000, 0001, ..., 9999 iš viso yra 10^4, tai tokių skaičių porų kiekis lygus 10^8. Vadinasi, iš 100 000 001 pirmųjų Fibonačio skaičių yra bent dvi tokios poros (u_m, u_{m+1}) ir (u_n, u_{n+1}), $n>m$, kad skaičių u_m ir u_n, o taip pat u_{m+1} ir u_{n+1}, keturi paskutiniai skaitmenys yra vienodi. Tokiu atveju u_n-u_m ir $u_{n+1}-u_{m+1}$ baigiasi keturiais nuliais. Kadangi

$$u_{n-1}-u_{m-1}=(u_{n+1}-u_{m+1})-(u_n-u_m),$$

tai skirtumas $u_{n-1}-u_{m-1}$ irgi baigiasi keturiais nuliais. Tęsdami indekso mažinimą ir turėdami mintyje, kad $u_0=0$, įsitikiname, kad skaičius u_{n-m} baigiasi keturiais nuliais.

410. Sakykime, pasirinkome skaičius $u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+7}$. Išreikškime juos skaičiais u_n ir u_{n+1}:

$$u_{n+2}=u_n+u_{n+1}, \quad u_{n+3}=u_n+2u_{n+1}, \quad u_{n+4}=2u_n+3u_{n+1},$$

$$u_{n+5}=3u_n+5u_{n+1}, \quad u_{n+6}=5u_n+8u_{n+1}, \quad u_{n+7}=8u_n+13u_{n+1}.$$

Vadinasi, pasirinktųjų skaičių suma lygi $21u_n+33u_{n+1}$. Tuo tarpu $u_{n+8}=13u_n+21u_{n+1}$, o $u_{n+9}=21u_n+34u_{n+1}$. Iš nelygybės $u_{n+8}<21u_n+33u_{n+1}<u_{n+9}$ matyti, kad $21u_n+$ $+33u_{n+1}$ nėra Fibonačio skaičius.

411. a) Teiginys įrodomas indukcijos metodu. Kai $n=1$, jo teisingumas savaime aiškus. Sakykime, kad jis teisingas su kuria nors kintamojo n reikšme, t. y.

$$u_2+u_4+\ldots+u_{2n}=u_{2n+1}-1.$$

Prie abiejų šios lygybės pusių pridėkime po u_{2n+2}. Kadangi $u_{2n+2}+u_{2n+1}=u_{2n+3}$, tai $u_2+u_4+\ldots+u_{2n+2}=u_{2n+3}-1$. Taigi teiginys jau įrodytas. Panašiai įrodomas ir teiginys b).

c) Teiginys irgi įrodinėjamas matematinės indukcijos metodu.

d) Įrodinėdami šį teiginį, pastebėsime, kad

$$u_{n+1}^2-u_n u_{n+2}=u_{n+1}^2-u_n^2-u_n u_{n+1}=u_{n+1}(u_{n+1}-u_n)-u_n^2=u_{n-1}u_{n+1}-u_n^2.$$

Todėl

$$u_{n+1}^2-u_n u_{n+2}=(-1)^n(u_1^2-u_0 u_2)=(-1)^n.$$

Teiginius e) ir f) įrodinėsime kartu. Kai $n=1$, jie savaime aiškūs. Sakykime, kad jie jau įrodyti, kai $n=k$. Tada, remdamiesi teiginiu d), gauname

$$u_1 u_2+u_2 u_3+\ldots+u_{2k}u_{2k+1}+u_{2k+1}u_{2k+2}=$$

$$=u_{2k+1}^2-1+u_{2k+1}u_{2k+2}=u_{2k+1}u_{2k+3}-1=u_{2k+2}^2,$$

$$u_1 u_2+\ldots+u_{2k+1}u_{2k+2}+u_{2k+2}u_{2k+3}=$$

$$=u_{2k+2}^2+u_{2k+2}u_{2k+3}=u_{2k+2}u_{2k+4}=u_{2k+3}^2-1.$$

Vadinasi, kai $n=k+1$, tie teiginiai irgi teisingi. Todėl jie teisingi su visomis n reikšmėmis.

g) Įrodinėdami šį teiginį, pastebėsime, kad iš teiginių a) ir b) gaunama lygybė u_1+ $+u_2+\ldots+u_{n+1}=u_{n+3}-1$. Todėl, kai lygybė g) teisinga,

$$(n+1)u_1+nu_2+\ldots+2u_n+u_{n+1}=u_{n+4}-(n+3)+u_{n+3}-1=u_{n+5}-(n+4).$$

Kadangi lygybė g) teisinga, kai $n=1$, tai ji teisinga su visomis kintamojo n reikšmėmis.

h) Šią lygybę lengva išvesti, pastebėjus, kad

$$\frac{u_{3n+2}-1}{2}+u_{3n+3}=\frac{u_{3n+5}-1}{2}.$$

i) Įrodinėdami šią lygybę, formulėje $u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_n u_{m+1}$ vietoj m parašysime n. Tada gausime $u_{2n}=u_{n-1}u_n+u_n u_{n+1}=u_{n+1}^2-u_{n-1}^2$. Panašiai įrodoma, kad $u_{2n+1}=u_n^2+u_{n+1}^2$. Jei pradžioje parašytoje formulėje vietoj m parašytume $2n$, tai gautume

$$u_{3n}=u_{n-1}u_{2n}+u_n u_{2n+1}=u_{n-1}(u_{n+1}^2-u_{n-1}^2)+u_n(u_n^2+u_{n+1}^2)=u_{n+1}^3+u_n^3-u_{n-1}^3.$$

412. Sakykime, kad $u_n \leqslant N < u_{n+1}$. Tada $0 \leqslant N-u_n < u_{n-1}$. Todėl turi būti toks skaičius s ($s<n-1$), kad $u_s \leqslant N-u_n < u_{s+1}$. Tačiau tokiu atveju $0 \leqslant N-u_n-u_s < u_{s-1}$ ir, be to, $s-1<n-2$. Po kelių etapų gausime lygybę $N=u_n+u_s+u_p+\ldots+u_r$, kurioje gretimų indeksų $n, s, p, \ldots, r$ skirtumas nėra mažesnis už 2.

413. Tas variantų skaičius lygus koeficientui, kurį gauname prie x^s, kai reiškinį

$$(1+x+\ldots+x^p)(1+x+\ldots+x^q)(1+x+\ldots+x^r)=$$
$$=(1-x^{p+1})(1-x^{q+1})(1-x^{r+1})(1-x)^{-3}=$$
$$=(1-x^{p+1}-x^{q+1}-x^{r+1}+\ldots)(1+3x+6x^2+\ldots+C_{n+2}^2x^n+\ldots)$$

išdėstome kintamojo x laipsniais. Kadangi $p<q+r$, tai $p<s$, $q<s$ ir $r<s$. Todėl tas koeficientas yra šitoks:

$$C_{s+2}^2-C_{s-p+1}^2-C_{s-q+1}^2-C_{s-r+1}^2=$$
$$=\frac{(s+2)(s+1)}{2}-\frac{(s-p+1)(s-p)}{2}-\frac{(s-q+1)(s-q)}{2}-\frac{(s-r+1)(s-r)}{2}.$$

Sudauginę skliaustuose parašytuosius reiškinius ir atkreipę dėmesį, kad $p+q+r=2s$, gauname $s^2+s+1-\frac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)$.

414. Jei $q+r<p$, tai $q<s$ ir $r<s$, bet $p \geqslant s$. Todėl koeficientas lygus $C_{s+r}^2-C_{s-q+1}^2-C_{s-r+1}^2$. Iš to ir išplaukia nurodytasis teiginys.

415. Iš tų visų daiktų galima sudaryti $(pq+r)!$ kėlinių. Sudarę kokį nors kėlinį, pasirenkame r žmonių, kurie gauna po $q+1$ daiktų (C_p^r variantų), ir atiduodame jiems daiktus iš eilės, duodami atitinkamai q arba $q+1$ daiktų. Kadangi rezultatas nepriklauso nuo elementų išdėstymo grupėse, tai $C_p^r(pq+r)!$ reikia padalyti iš $(q!)^{p-r}[(q+1)!]^r=(q!)^p(q+1)^r$.

416. Kadangi $\sum_{i_0=1}^{i_1} 1=i_1=C_{i_1}^1$, tai $\sum_{i_1=1}^{i_2}\sum_{i_0=1}^{i_1} 1=\sum_{i_1=1}^{i_2} C_{i_1}^1=C_{i_2+1}^2$. Toliau gauname

$$\sum_{i_2=1}^{i_3}\sum_{i_1=1}^{i_2}\sum_{i_0=1}^{i_1} 1=\sum_{i_2=1}^{i_3} C_{i_2+1}^2=C_{i_3+2}^3.$$ Iš to aišku, kad pateiktoji suma lygi C_{n+m}^{n+1}.

417. Visus kėlinius, sudarytus iš m baltų ir n juodų rutulių, suskirstysime į klases. Klasei $(k_1, \ldots, k_m)$ priskirsime tuos kėlinius, kuriuose yra k_1 izoliuotų vienas nuo kito baltųjų rutulių, k_2 neišskirtų baltųjų rutulių porų, k_3 neišskirtų trejetų, ..., k_m grupių, sudarytų iš m vienas prie kito stovinčių baltųjų rutulių. Savaime aišku, kad $k_1+2k_2+\ldots+mk_m=m$. Apskaičiuosime, kiek kėlinių priklauso klasei $(k_1, \ldots, k_m)$. Jei n juodųjų rutulių sustatysime į eilę, tai atsiras $n+1$ vietų, kuriose galėsime statyti baltuosius rutulius. Iš jų k_1 vietų užims izoliuotai stovį baltieji rutuliai, k_2 vietų – baltųjų rutulių poros, ..., k_m vietų – grupės, sudarytos iš m baltųjų rutulių. Be to, dar liks $n-k_1-\ldots-k_m+1$ tuščių vietų. Todėl skaičius būdų paskirstyti vietas baltiesiems rutuliams, t. y. klasės $(k_1, \ldots, k_m)$ kėlinių skaičius, lygus $P(k_1, \ldots, k_m, n-k_1-\ldots-k_m+1)$. Kadangi iš m baltų ir n juodų rutulių galima sudaryti iš viso C_{n+m}^m kėlinių, tai pateiktoji lygybė teisinga.

418. a) Išsprendę charakteringąją lygtį $r^2-7r+12=0$, sužinome jos šaknis: $r_1=3$, $r_2=4$. Todėl bendrasis sprendinys yra toks: $a_n=C_1\cdot 3^n+C_2\cdot 4^n$. b) Visiškai panašiai gauname $a_n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot(-5)^n$. c) Šiuo atveju $a_n=C_1(2+3i)^n+C_2(2-3i)^n$. d) $a_n=C_1(3i)^n+C_2(-3i)^n$. e) $r_1=r_2=-2$; todėl $a_n=(-2)^n(C_1+C_2n)$. f) Charakteringosios lygties $r^3-9r^2+26r-24=0$ šaknys tokios: $r_1=2$, $r_2=3$, $r_3=4$; todėl $a_n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 3^n+C_3\cdot 4^n$. g) $r_1=r_2=r_3=-1$; todėl $a_n=(-1)^n(C_1+C_2n+C_3n^2)$. h) Charakteringosios

lygties $r^4+4=0$ šaknys yra šitokios: $r_{1,2}=1\pm i$, $r_{3,4}=-1\pm i$. Todėl $a_n=C_1(1+i)^n+C_2(1-i)^n+C_3(-1+i)^n+C_4(-1-i)^n$.

419. a) Išsprendę charakteringąją lygtį $r^2-5r+6=0$, sužinome jos šaknis: $r_1=2$, $r_2=3$. Todėl $a_n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 3^n$. Įstatę $n=1$ ir $n=2$, gauname lygčių sistemą

$$2C_1+3C_2=1, \quad 4C_1+9C_2=-7,$$

iš kurios randame C_1 ir C_2. Kadangi $C_1=5$, $C_2=-3$, tai $a_n=5\cdot 2^n-3^{n+1}$.

b) Šiuo atveju $a_n=2^n(C_1+C_2n)$. Įstatę $n=1$ ir $n=2$, gauname lygčių sistemą $C_1+C_2=1$, $C_1+2C_2=1$, iš kurios sužinome, kad $C_1=1$, $C_2=0$. Todėl $a_n=2^n$.

c) $a_n=\dfrac{1}{2^{n+2}}\left((-1+i\sqrt{3})^n+(-1-i\sqrt{3})^n\right)$.

d) $a_n=2^n+3^n-4^n$.

420. Charakteringosios lygties $r^2-2r\cos\alpha+1=0$ šaknys yra šitokios: $r_{1,2}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$. Todėl $a_n=C_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+C_2(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n$. Įstatę $n=1$ ir $n=2$, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases}(C_1+C_2)\cos\alpha+(C_1-C_2)\,i\sin\alpha=\cos\alpha,\\(C_1+C_2)\cos 2\alpha+(C_1-C_2)\,i\sin 2\alpha=\cos 2\alpha.\end{cases}$$

Iš čia $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$. Todėl $a_n=\dfrac{1}{2}\left((\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n\right)$. Remdamiesi Muavro formule, gauname $a_n=\cos n\alpha$.

421. Teiginys išplaukia iš to, kad charakteringąją lygtį

$$r^k-C_k^1r^{k-1}+C_k^2r^{k-2}-\ldots+(-1)^k=0$$

galima parašyti trumpai: $(r-1)^k=0$. Ji turi k-tojo kartotinumo šaknį $r=1$. Todėl vienas rekurentinio sąryšio sprendinys yra $a_n=n^k$ (žr. p. 132).

422. $a_n=\dfrac{n}{12}\cdot 2^n+C_1\cdot(-4)^n+C_2\cdot 2^n$.

423. Rašome tokius dėstinius:

$$(1+x)^p=1+C_p^1x+C_p^2x^2+\ldots+C_p^mx^m+\ldots+C_p^px^p, \qquad (*)$$

$$(1+x)^{-k-1}=1-C_{k+1}^1x+C_{k+2}^2x^2-\ldots+(-1)^sC_{k+s}^sx^s+\ldots, \qquad (**)$$

$$(1+x)^{p-k-1}=1+C_{p-k-1}^1x+\ldots+C_{p-k-1}^nx^n+\ldots$$

Sudauginę panariui lygybes (*) ir (**), surandame koeficientą prie x^n. Jis lygus

$$\sum_s(-1)^{n-s}C_{k+n-s}^{n-s}C_p^s=\sum_s(-1)^sC_{k+s}^sC_p^{n-s}.$$

Iš čia betarpiškai gauname įrodomąją tapatybę.

Kitos tapatybės, nurodytos 424–438 uždaviniuose, išvedamos analogiškai.

439. Įrodoma indukcijos metodu, taikant jį kintamajam n.

TURINYS

Naumas Vilenkinas
KOMBINATORIKA

Redaktorius *A. Plėšnys*
Viršelis *A. Špuko*
Men. redaktorė *A. Onaitytė*
Techn. redaktorė *I. Kondreckienė*
Korektorė *J. Gervienė*
Vertimą recenzavo *Ričardas Razmas*

Библиотека школьника
Наум Яковлевич Виленкин
КОМБИНАТОРИКА
Перевел с русского *Пятрас Румшас*
Рекомендовано Министерством просвещения Литовской ССР
На литовском языке
Литовская ССР, Каунас, пр. Ленина, 25, издательство «Швиеса»

ИБ № 936
Duota rinkti 78.04.20. Pasirašyta spausdinti 79.04.13. Formatas 60×
×90¹/₁₆, popierius spaudos Nr. 3, romaniška garnitūra, iškilioji spauda,
1 spalva. 15,5 sąl. sp. lnk., 18,38 leid. lnk. Tiražas 10 000 egz. Užsakymo Nr. 600. Leid. Nr. 8149
Kaina 65 kap.
Leidykla „Šviesa", 233000 Kaunas, Lenino pr. 25.
K. Poželos spaustuvė, 233000 Kaunas, Gedimino 10.